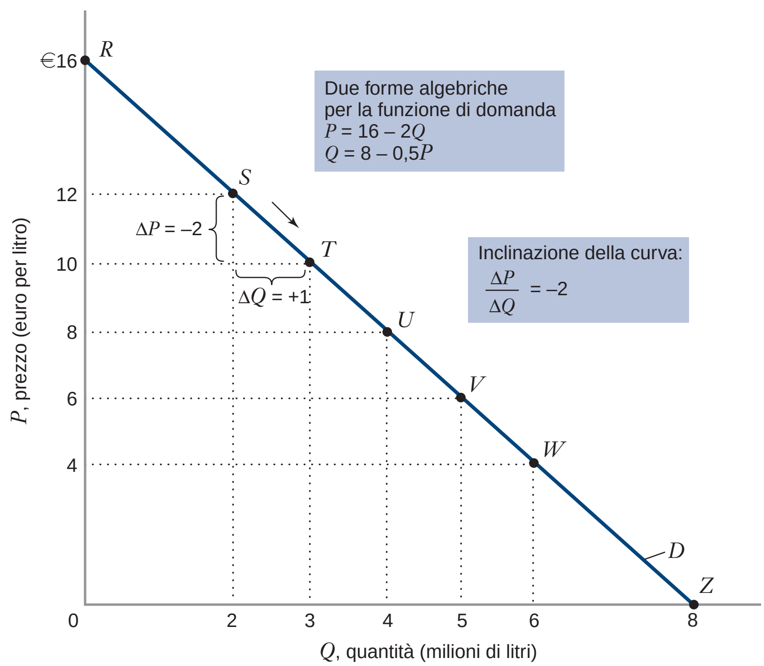
Appendice matematica

Questa appendice fornisce una descrizione di alcuni dei concetti matematici che risultano più utili per affrontare lo studio della microeconomia. Oltre a introdurre e presentare tali concetti, cercheremo di illustrarli in concreto attraverso esempi specifici selezionati all'interno del testo.

A.1 RELAZIONI FUNZIONALI

L'analisi economica richiede spesso di capire in che modo le variabili economiche si relazionino tra di loro. Vi sono fondamentalmente tre modi per descrivere le relazioni fra variabili: attraverso dei grafici, attraverso delle tabelle oppure attraverso delle funzioni algebriche. La Figura A.1, per esempio, contiene informazioni relative alla domanda di vernici in un certo mercato.



Punti del grafico	Prezzo della vernice (€ per litro)	Milioni di litri venduti in un anno
S	12	2
T	10	3
U	8	4
V	6	5
W	4	6

FIGURA A.1 Relazioni funzionali: un esempio basato sulla curva di domanda
In presenza di esternalità negativa, il costo marginale sociale (MSC, *Marginal Social Cost*) è superiore al costo marginale privato *MPC* di un ammontare pari al costo marginale esterno *MEC*. Se le imprese non pagano per i costi esterni, la curva di offerta del mercato è la curva di costo marginale privato del settore *MPC*. Il prezzo di equilibrio sarà P_1 e la produzione del mercato sarà Q_1. In corrispondenza dell'ottimo sociale, alle imprese dovrebbe essere richiesto di pagare per i costi esterni che provocano, la qual cosa porterebbe a un prezzo P^* e a una quantità Q^*. L'esternalità porta dunque il mercato a una sovrapproduzione pari alla quantità ($Q_1 - Q^*$) e a una perdita secca pari all'area *M*.

La tabella riportata sotto la figura indica la quantità di vernici richiesta dai consumatori in corrispondenza dei possibili livelli di prezzo: per esempio, se il prezzo fosse di €10 per ogni litro di vernice, la quantità scambiata sul mercato risulterebbe pari, complessivamente, a 8 milioni di litri l'anno.

Queste informazioni sono mostrate anche all'interno del grafico, in corrispondenza del punto *T*. Per convenzione, gli economisti rappresentano le curve di domanda in grafici nei quali i prezzi vengono riportati sull'asse verticale e le quantità su quello orizzontale. Dato che le quantità scambiate vanno lette sull'asse delle ascisse (e sono misurate in milioni di litri), il punto *T* avrà per coordinate (3,10). Sappiamo inoltre che, quando il prezzo è pari a €8 al litro, i consumatori domandano in tutto 4 milioni di litri; nel grafico, questo corrisponde al punto *U*, che ha coordinate (4,8). Le altre combinazioni mostrate nella tabella corrispondono invece ai punti *S*, *V*, e *W della figura*. Come si evince da questo esempio, grafici e tabelle possono essere molto utili per descrivere la relazione che esiste fra le variabili economiche.

Spesso però risulta altrettanto utile ricorrere a delle equazioni per esprimere tali relazioni. Utilizzando la notazione funzionale, per esempio, è possibile esprimere la relazione che intercorre fra prezzo e quantità:

$$Q = f(P) \tag{A.1}$$

Tale funzione ci dice come *Q*, ovvero la quantità di vernici consumata (espressa in milioni di litri) dipenda dal prezzo *P* (espresso in € per litro). La forma funzionale specifica che descrive i dati della Figura A.1 è la seguente:

$$Q = 8 - 0,5\ P \tag{A.2}$$

L'Equazione (A.2) rappresenta quindi la funzione di domanda che contiene tutti i punti mostrati nella Figura A.1. Abbiamo scritto le equazioni (A.1) e (A.2) ponendo *Q* a primo membro e *P* a secondo membro: questo è il modo naturale di scrivere la funzione di domanda nel caso in cui il quesito che ci si pone è "in che modo il numero delle unità vendute dipende dal prezzo?"

La variabile che si trova a sinistra dell'uguale (in questo caso *Q*) è definita variabile dipendente, mentre quella posta a destra dell'uguale (in questo caso *P*) prende il nome di variabile indipendente. Utilizziamo ora l'Equazione (A.2) per trovare la quantità consumata di vernici quando il prezzo delle stesse è di €8 al litro. Se $P = 8$, allora $Q = 8 - 0,5(8) = 4$, per cui la quantità complessivamente acquistata dai consumatori ammonterà a 4 milioni di litri. Per sottolineare che *Q* è funzione di *P*, l'Equazione (A.2) può essere riscritta come: $Q(P) = 8 - 0,5P$.

Possiamo quindi usare la funzione di domanda per individuare, per esempio, il particolare livello di prezzo che indurrà i consumatori a domandare una specifica quantità. L'esercizio è utile per i produttori, che possono essere interessati a scoprire il prezzo al quale possono collocare sul mercato il quantitativo che è loro intenzione produrre e vendere. Facciamo allora assumere a *P* il ruolo di variabile dipendente e a *Q* quello di variabile indipendente. Per capire come *P* dipenda da *Q*, dobbiamo "invertire" l'Equazione (A.2), risolvendo per *P* in funzione di *Q*. Facendo in questo modo, troviamo quella che viene comunemente definita come "funzione di domanda inversa", rappresentata, in questo caso, dall'Equazione (A.3):

$$P = 16 - 2Q \tag{A.3}$$

Tutte le combinazioni prezzo-quantità della tabella riportata nella Figura A.1 soddisfano questa equazione. Utilizziamo ora l'Equazione (A.3) per scoprire quale prezzo indurrà i consumatori a domandare esattamente 4 milioni di litri di vernice l'anno. Sostituendo $Q = 4$ all'interno di tale equazione, troviamo che $P = 16 - 2(4) = 8$: (diviso? due punti?)la domanda complessiva ammonterà a 4 milioni di litri l'anno quando il prezzo praticato risulterà pari a €8 al litro. Per sottolineare che, questa volta, è P a essere funzione di Q, è possibile riscrivere l'Equazione (A.3) come $P(Q) = 16 - 2Q$.

Se rappresentiamo la curva di domanda riportando P sull'asse verticale e Q su quello orizzontale, l'inclinazione della curva è data dalla variazione del prezzo (rappresentata dalla distanza verticale) divisa per la variazione osservata nella quantità (data dalla distanza orizzontale) che è possibile osservare muovendosi lungo la curva stessa. A titolo di esempio, supponiamo di muoverci dal punto S al punto T; la variazione del prezzo è $\Delta P = -2$ mentre la variazione della quantità è data da $\Delta Q = +1$. Per quanto detto in precedenza, l'inclinazione è quindi pari a $\Delta P/\Delta Q = -2$. Dal momento che la curva di domanda riferita a questo esempio è, in realtà, una retta, la sua inclinazione risulta costante, qualsiasi sia il punto della curva che consideriamo. L'intercetta con l'asse verticale coincide con il punto R, in corrispondenza del quale il prezzo è di €16 per litro; nessun litro di vernice verrà quindi acquistato per questo livello di prezzo, così come per qualsiasi livello di prezzo superiore.[1]. Se il prezzo delle vernici fosse zero, i consumatori domanderebbero complessivamente 8 milioni di litri. Questa è quindi l'intercetta orizzontale della curva, rappresentata dal punto Z del grafico.

Per imparare bene come disegnare le curve di domanda e di offerta a partire da un'equazione data, può essere utile andare a rivedere gli Esercizi svolti 2.1 e 2.2.

Esercizio svolto A.1

Rappresentazione grafica del costo totale

Questo esempio può risultare utile per comprende come si possa rappresentare graficamente (o in forma di tabella) la funzione del costo totale. Tale funzione descrive, in termini algebrici, la relazione che intercorre fra il costo totale di produzione (C) e la quantità prodotta (Q):

$$C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q \tag{A.4}$$

Problema

Indica, all'interno di una tabella, il costo totale di produzione relativo ai seguenti livelli di output: $Q = 0$, $Q = 1$, $Q = 2$, $Q = 3$, $Q = 4$, $Q = 5$, $Q = 6$, $Q = 7$. Rappresenta graficamente la funzione del costo totale, riportando lungo l'asse verticale i costi totali e riportando invece lungo l'asse orizzontale le quantità.

Soluzione

Le prime due colonne della Tabella A.1 mostrano il costo totale relativo a ciascun livello di produzione. Per esempio, nel caso si producano tre unità di output, valutiamo la funzione $C(Q)$ in corrispondenza di $Q = 3$: troviamo quindi $C(3) = (3)^3 - 10(3)^2 + 40(3) = 57$. (Per quanto concerne le altre colonne della tabella, torneremo a esaminarle più avanti.) Il costo totale di produzione è rappresentato nel riquadro (a) della Figura A.2. [Il riquadro (b) ci servirà invece più avanti.]

---

[1] Richiamando le nozioni di base di algebra, l'equazione di una retta è $y = mx + b$, dove i valori di y sono riportati sull'asse verticale e quelli di x sull'asse orizzontale. In un grafico di questo tipo, m rappresenta l'inclinazione della retta e b l'intercetta verticale. Nella Figura A.1 la variabile y è, in realtà, il prezzo P (riportato infatti sull'asse delle ordinate) mentre la variabile x è Q (misurata infatti lungo l'asse delle ascisse). Quindi, anziché avere l'equazione $y = -2x + 16$, nell'esempio considerato abbiamo $P = -2Q + 16$. L'inclinazione della retta è allora pari a -2 e l'intercetta verticale è 16.

TABELLA A.1 Relazione fra costo totale, costo medio e costo marginale*

(1) Quantity Produced (units) Q	(2) Total Cost (\$) C	(3) "Arc" Marginal Cost (\$/unit) $C(Q) \cdot C(Q \cdot 1)$	(4) "Point" Marginal Cost (\$/unit) dC/dQ	(5) Average Cost (\$/unit) C/Q
0	0		40	
		$C(1) \cdot C(0) = 31$		
1	31		23	31
		$C(2) \cdot C(1) = 17$		
2	48		12	24
		$C(3) \cdot C(2) = 9$		
3	57		7	19
		$C(4) \cdot C(3) = 7$		
4	64		8	16
		$C(5) \cdot C(4) = 11$		
5	75		15	15
		$C(6) \cdot C(5) = 21$		
6	96		28	16
		$C(7) \cdot C(6) = 37$		
7	133		47	19

A.2 Cosa significa "marginale"?

Nel momento in cui sono chiamati a effettuare delle scelte, gli individui sono spesso interessati al **valore marginale** della variabile dipendente. Tale valore misura la variazione osservabile nella variabile dipendente a fonte di una variazione unitaria nel valore della variabile indipendente.

Il costo marginale, per esempio, rappresenta la variazione del costo totale dovuta a un incremento unitario della produzione ed è quindi dato da $\Delta C/\Delta Q$. Chi deve stabilire il livello di produzione in un'impresa è interessato a conoscere il costo marginale per sapere di quanto aumenta il costo se si decide di produrre un'unità in più di output. Torniamo alla Tabella A.1, in cui è mostrato il costo totale sulla base dell'Equazione (A.4). La variabile dipendente è il costo totale, mentre quella indipendente è la quantità prodotta. La tabella mostra due modi diversi per misurare il costo marginale.

Nella colonna numero tre, il costo marginale viene calcolato mostrando come varia il costo totale nel momento in cui si realizza un'unità addizionale di prodotto. Tale colonna è intitolata "Costo marginale approssimato" poiché misura la variazione dei costi in riferimento a un intervallo per cui le quantità possono aumentare solo unità per unità. Tanto per fare un esempio, supponiamo che la quantità aumenti da $Q = 2$ a $Q = 3$; il costo totale aumenta allora da $C(2) = 48$ a $C(3) = 57$. Di conseguenza, il costo marginale in questa porzione della curva dei costi totali è dato da $C(3) - C(2) = 9$. In modo analogo, possiamo calcolare il costo marginale nel caso si passi da $Q = 5$ a $Q = 6$: troviamo che $C(6) - C(5) = 21$.

Disponendo di questi dati, è possibile rappresentare graficamente il costo marginale. Consideriamo la Figura A.2(a). L'asse verticale riporta i costi totali, mentre quello orizzontale misura le quantità prodotte. Possiamo dimostrare che il costo marginale calcolato nella terza colonna della tabella precedente costituisce un'approssimazione dell'inclinazione della curva del costo totale, in riferimento all'intervallo di valori considerato. Determiniamo, per esempio, il costo marginale d produzione che si deve sostenere aumentando la produzione da $Q = 5$ (siamo nel punto A) a $Q = 6$ (siamo nel punto

B). Tracciamo quindi un segmento che congiunga i punti A e B; l'inclinazione di tale segmento rappresenta la variazione dei costi (l'incremento – più precisamente – che in questo caso è pari a 21) rapportata alla variazione della quantità (unitaria). L'inclinazione del segmento AB risulta, pertanto, coincidere con la misura del costo marginale riportata nella terza colonna della tabella. È bene notare che, nell'intervallo considerato lungo l'asse orizzontale (fra 5 e 6), l'inclinazione della curva dei costi varia: il costo marginale che abbiamo calcolato sulla base di variazioni unitarie rappresenta quindi solo un'approssimazione della reale inclinazione della curva nell'intervallo in esame.

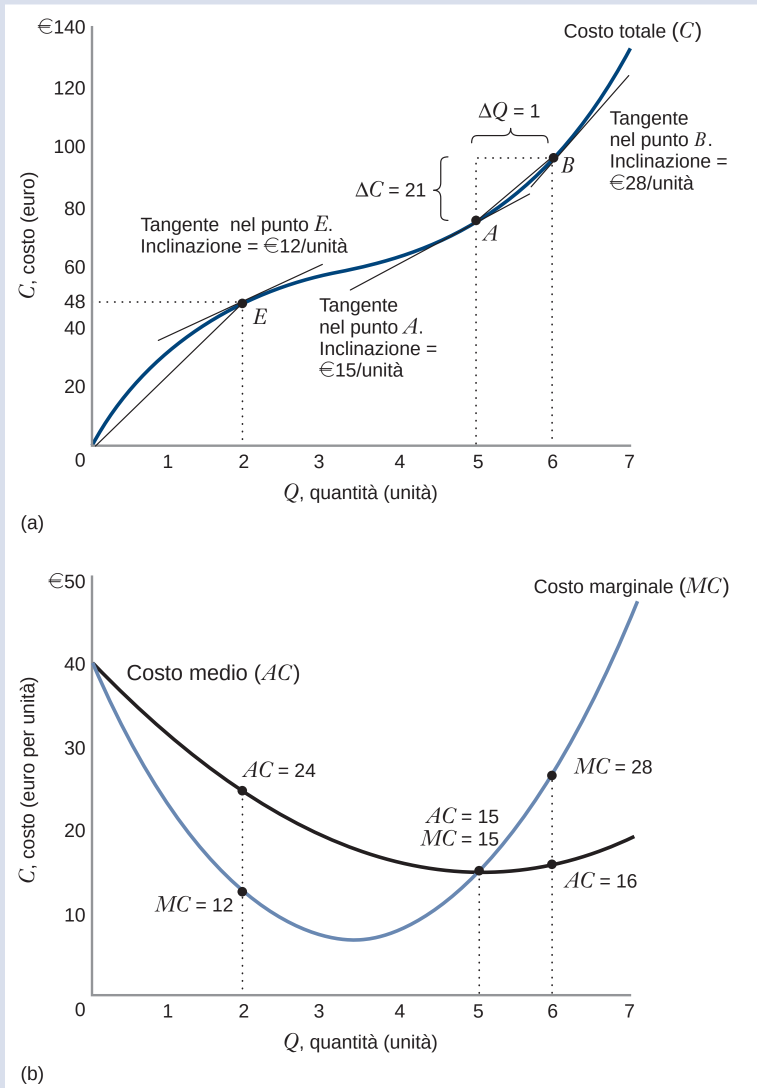


FIGURA A.2 Relazione grafica fra costi totali, costi medi e costi marginali
Il riquadro (a) mostra il costo totale di produzione per ogni possibile livello di output. Le unità riportate lungo l'asse verticale di questo grafico sono unità monetarie, più precisamente euro. Il riquadro (b) mostra invece la curva del costo medio corrispondente alla curva del costo totale rappresentata nel riquadro superiore. In questo secondo grafico, lungo l'asse verticale l'unità di misura sono gli euro per unità di prodotto. Il riquadro (b) mostra inoltre il *valore del costo marginale* per ogni livello di produzione, che corrisponde all'inclinazione della curva del costo totale del riquadro (a).

Anziché procedere per approssimazioni, possiamo calcolare esattamente il costo marginale in ogni specifico punto (vale a dire, in corrispondenza di una particolare quantità). Consideriamo, per esempio, il punto A. In corrispondenza di tale punto, l'inclinazione della curva del costo totale coincide con l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto stesso. L'inclinazione della retta tangente misura il saggio al quale varia il costo totale nel punto *A: di conseguenza, l'inclinazione della retta tangente alla curva del costo totale nel punto A rappresenta il costo marginale di produzione quando la quantità prodotta è al livello corrispondente ad A*.

In modo analogo, l'inclinazione della tangente alla curva del costo totale nel punto B rappresenta il costo marginale di produzione quando la quantità prodotta è quella corrispondente a B. Come è possibile determinare il valore esatto del costo marginale in un punto preciso? Si potrebbe costruire un grafico molto accurato, calcolando il costo totale per ogni possibile livello di produzione per poi misurare l'inclinazione della tangente nel punto di nostro interesse. In riferimento al punto B (dove $Q = 6$) la retta tangente alla curva del costo totale in quel punto ha un'inclinazione pari a 28: (diviso? due punti?) questo significa che, quando $Q = 6$, il costo marginale di produzione è di €28. Similmente, è possibile dimostrare che, quando $Q = 2$, il costo marginale è di €12, dal momento che, in quel punto (denotato con E), la retta tangente alla curva del costo totale ha un'inclinazione pari a 12.

La quarta colonna della Tabella A.1 mostra il valore esatto, nel "punto", del costo marginale in corrispondenza delle quantità considerate. Come vedremo più avanti, anziché disegnare il grafico in misura accurata e calcolare poi le inclinazioni esatte delle rette, è possibile determinare il costo marginale in modo più immediato, attraverso il calcolo. (Si veda, a tal proposito, l'Esercizio svolto A.5.)

La relazione fra valori medi e valori marginali

Il **valore medio** rappresenta il valore complessivo assunto dalla variabile dipendente, diviso per il valore assunto dalla variabile indipendente. La Tabella A.1 riporta anche i dati relativi al costo medio, dato dal costo totale diviso per la quantità prodotta, ovvero C/Q. Il costo medio è riportato nella colonna 5. Ovviamente, anche per il costo medio è possibile una rappresentazione grafica. Consideriamo il grafico della Figura A.2; possiamo dimostrare che il costo medio, in corrispondenza di ogni quantità, è dato dall'inclinazione del segmento che congiunge l'origine degli assi con la curva del costo totale. Determiniamo, per esempio, il costo medio di produzione nel punto E, ovvero quando $Q = 2$. Tracciamo allora il segmento OE che collega l'origine degli assi e il punto E. L'inclinazione di questo segmento corrisponde al costo totale (in questo caso, uguale a €48) diviso per la quantità prodotta (pari a 2): tale inclinazione ci dà quindi un costo medio di produzione pari a €24. In riferimento allo stesso punto, il valore del costo medio è, in genere, diverso da quello del costo marginale. Quando $Q = 2$, abbiamo calcolato in precedenza che il costo medio è 24 (tale era l'inclinazione del segmento che unisce il punto *E e l'origine*).

Guardiamo a come sono stati rappresentati questi valori del costo medio e del costo marginale nella Figura A.2(b). In un grafico a parte, è disegnata la curva del costo totale e, in un altro, le curve del costo marginale e del costo medio. Le unità di costo sono espresse in termini monetari (in euro, per esempio). Di conseguenza, le unità di costo marginale ($C/\Delta Q$) e quelle di costo medio (C/Q) sono espresse in termini di euro *per unità*. La dimensione del costo totale è quindi diversa da quella dei costi marginali e medi.

È fondamentale comprendere bene la relazione tra valore marginale e valore medio. Dato che il valore marginale esprime il saggio al quale varia il valore totale, è possibile verificare che:

- il valore medio deve necessariamente aumentare se il valore marginale è maggiore di quello medio;
- il valore medio deve necessariamente ridursi se il valore marginale è minore di quello medio;
- il valore medio è costante quando il valore marginale uguaglia quello medio.

Queste relazioni sono valide qualsiasi siano la variabile e l'unità di misura che consideriamo. Supponiamo, per esempio, che l'altezza media degli studenti di una classe sia pari a 180 centimetri. Supponiamo ora che arrivi un nuovo studente, la cui altezza è 190 centimetri; dal momento che la sua altezza eccede quella media degli altri studenti, l'altezza media deve per forza di cose aumentare a seguito dell'arrivo del nuovo studente. Se, invece, l'altezza del nuovo arrivato fosse stata 160 centimetri, l'altezza media della classe sarebbe, inevitabilmente, diminuita. Se, infine, il nuovo arrivato fosse alto esattamente 180 centimetri, non osserveremmo alcuna variazione dell'altezza media della classe. L'aritmetica di base chiarisce quindi la relazione che deve sempre sussistere fra prodotto medio e prodotto variabile (si vedano le Figure 6.3 e 6.4), tra costi medi e costi marginali di produzione (si vedano le Figure 8.7, 8.8, 8.9 e 8.10), tra ricavo medio e ricavo marginale in caso di monopolio (si vedano le Figure 11.2 e 11.4) oppure ancora fra la spesa media e quella marginale in regime di monopsonio (si veda la Figura 11.18).

Esercizio svolto A.2

La relazione fra costo medio e costo marginale

Questo esempio può chiarire ulteriormente la relazione fra valori medi e valori marginali. Il riferimento è alle curve dei costi medi e marginali rappresentate nella Figura A.2(b).

Problema

Utilizza la relazione fra costi medi e costi marginali per spiegare se e perché la curva dei costo medio risulta crescente, decrescente o costante in corrispondenza dei seguenti livelli di produzione:
(a) $Q = 2$
(b) $Q = 5$
(c) $Q = 6$

Soluzione

(a) Quando $Q = 2$, la curva del costo marginale giace al di sotto della curva del costo medio e quindi la curva del costo medio risulta decrescente (ha quindi un'inclinazione negativa).
(b) Quando $Q = 5$, la curva del costo marginale si interseca con la curva del costo medio; la curva del costo medio non può essere né crescente né decrescente e ha quindi inclinazione pari a zero per quel livello di output. Questo significa che stiamo considerando il punto di minimo della curva del costo medio. (Discuteremo come individuare i punti di minimo e di massimo di una funzione più avanti.)
(c) Quando $Q = 6$, la curva del costo marginale giace al di sopra della curva del costo medio e quindi la curva del costo medio risulta crescente (ha infatti un'inclinazione positiva).

A.3 Le derivate

Nella Figura A.2 avevamo mostrato uno dei modi possibili per calcolare il costo marginale, rappresentando la curva dl costo totale in modo accurato per poi calcolare con precisione l'inclinazione della curva in corrispondenza dei vari livelli di produzione. Oltre che dispendioso in termini di tempo e fatica, questo procedimento non sempre consente comunque di ottenere una misura affinata del costo marginale. Risulta certamente preferibile procedere a tale misura ricorrendo alle tecniche del calcolo differenziale, che consentono di individuare i valori marginali in modo molto più semplice e preciso. Supponiamo che y sia la variabile dipendente e che x sia la variabile indipendente in una funzione del tipo: $y = f(x)$

Consideriamo ora la Figura A.3, nella quale il valore della variabile dipendente è, come al solito, riportato sull'asse verticale, mentre sull'asse orizzontale sono riportati i valori della variabile indipendente. Come già detto in precedenza, se y misura il valore totale, l'inclinazione della curva in ciascun punto fornisce una misura del valore marginale. (Se, per esempio, y misurasse il costo totale e *x la quantità*, l'inclinazione della funzione di costo rappresenterebbe il costo marginale per ciascuno dei livelli di produzione considerati.)

Per trovare l'inclinazione di una curva in ciascuno dei suoi punti, facciamo ricorso al concetto di **derivata**. Vediamo un'applicazione concreta di tale concetto, considerando la Figura A.3. Partiamo da un'approssimazione algebrica della pendenza del grafico. La funzione $y = f(x)$ rappresenta una curva, per cui sappiamo che la sua inclinazione varia nel momento in cui ci muoviamo lungo la curva stessa.

Potremmo approssimare l'inclinazione della curva nel punto E, *per esempio, scegliendo due punti sulla curva stessa, come* E ed F. Tracciamo ora il segmento che unisce questi due punti. La pendenza di tale segmento, che abbiamo chiamato EF, *è data dal rapporto fra la distanza verticale* ($\Delta y = y3 - y1$) e quella orizzontale ($\Delta x = x3 - x1$). Di conseguenza, l'inclinazione di EF è data da $\Delta y/\Delta x = (y3 - y1)/(x3 - x1)$. Come si evince dal grafico, l'inclinazione di EF non costituisce però una misura esatta dell'inclinazione della retta tangente nel punto E, ma una semplice approssimazione. Per come è disegnata la curva, l'inclinazione di EF è infatti inferiore a quella della retta tangente nel punto E.

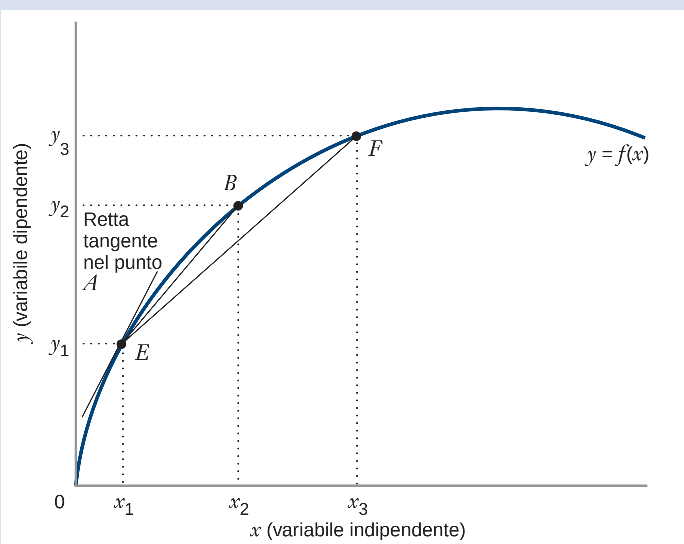


FIGURA A.3 Il significato della derivata di una funzione
Quando x = x1, la derivata di y rispetto a x (ovvero dy/dx) ci dà l'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto E.

È possibile ottenere un'approssimazione più accurata scegliendo un punto sulla curva più vicino a E rispetto al punto F. Consideriamo allora, per esempio, i punti E e B, che presentano una distanza laterale notevolmente inferiore rispetto alla coppia precedente E e F. Tracciamo il segmento che unisce i due punti in esame e denotiamolo con EB. L'inclinazione del segmento EB *è data da* $\Delta y/\Delta x = (y2 - y1)/(x2 - x1)$. Anche in questo caso, il grafico evidenzia come questa non rappresenti una misura esatta dell'inclinazione della retta tangente alla curva nel punto E (che risulta ancora sottostimata), ma questa è un'approssimazione sicuramente migliore rispetto a quella precedente. Se scegliessimo un punto ancora più vicino a E, la nostra approssimazione migliorerebbe ulteriormente, avvicinandosi sempre più al vero valore dell'inclinazione della tangente nel punto E. Quando consideriamo due punti sulla curva davvero molto vicini (con Δx *prossimo a zero)*, l'errore di approssimazione tende a zero.

Il valore dell'approssimazione per Δx tendente a zero rappresenta la derivata della funzione, scritta solitamente come dy/dx. Esprimiamo ora il concetto di derivata in termini più formali, come segue:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{A.5}$$

L'espressione "$\lim_{\Delta x \to 0}$" indica che stiamo valutando $\Delta y/\Delta x$ "al limite", ovvero quando Δx tende a zero. Il valore della derivata della funzione *(dy/dx) nel punto E* fornisce una misura esatta della pendenza del grafico in quel preciso punto.

A.4 Come calcolare una derivata

In questo paragrafo mostreremo come calcolare la derivata per alcune delle forme funzionali più comuni nelle applicazioni economiche. Per approfondire maggiormente il tema del calcolo delle derivate, è possibile utilizzare un qualsiasi manuale di analisi matematica, nel quale sarà possibile trovare, senza alcun dubbio, anche le derivate relative a forme funzionali non considerate in questo testo.

Derivata di una costante

Se la variabile dipendente y è in realtà una costante, la sua derivata rispetto alla variabile x è, banalmente, zero. In altre parole, supponiamo che $y = k$, dove k è una costante. È possibile dimostrare che, in questo caso, $dy/dx = 0$.

Consideriamo, per esempio, la funzione $y = 4$, rappresentata graficamente nella Figura A.4. L'inclinazione di tale curva può essere calcolata in due modi. In primo luogo, siccome la curva è in realtà una retta, sappiamo che il valore di y non cambia al variare di x; possiamo quindi concludere che l'inclinazione di tale retta è zero.

Il secondo modo per calcolare l'inclinazione passa invece attraverso il calcolo della derivata. Siccome la derivata di una costante è sempre uguale a zero, possiamo concludere che $dy/dx = 0$. La derivata è sempre zero, per cui il grafico della funzione $y = 4$ ha pendenza nulla.

Derivata di una potenza

Consideriamo una funzione della seguente forma:

$$y = ax^b \tag{A.6}$$

a e b rappresentano due costanti. La derivata di una funzione di questo tipo è:

$$\frac{dy}{dx} = bax^{b-1} \tag{A.7}$$

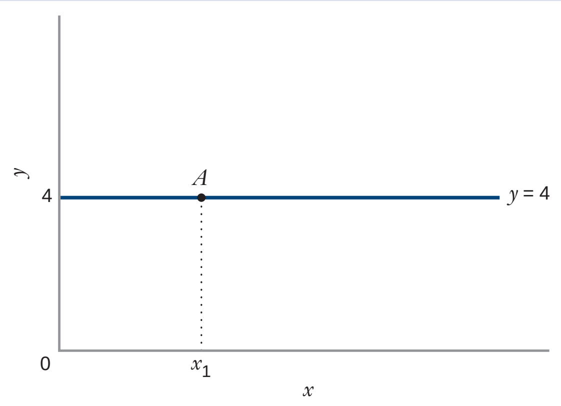


FIGURA A.4 Derivata di una costante
Il grafico si riferisce alla funzione $y = 4$. Siccome il valore di y non varia al variare di x, il grafico può essere rappresentato attraverso una linea perfettamente orizzontale. L'inclinazione è sempre pari a zero, così come la derivata della funzione: $dy/dx = 0$.

Consideriamo un esempio: supponiamo che $y = 4x$ e guardiamo alla rappresentazione grafica di tale funzione, mostrata nella parte sinistra della Figura A.5. Siccome la funzione è rappresentata da una retta, l'inclinazione risulta costante in ciascuno dei suoi punti. Di nuovo, possiamo calcolare l'inclinazione di questa retta seguendo due diverse procedure. Possiamo prendere due punti, come A e B, *e calcolare l'inclinazione come* $\Delta y/\Delta x = (16 - 8)/(4 - 2) = 4$. In alternativa, possiamo calcolare la derivata della funzione: $y = 4x$ è infatti una funzione del tipo descritto nell'Equazione (A.6), dove $a = 4$ e $b = 1$. Come mostrato nell'Equazione (A.5), la derivata è quindi $dy/dx = bax^{b-1} = 4(1)x^{1-1}= 4\ x^0 = 4$. Dato che la derivata dy/dx è *sempre* pari a 4, l'inclinazione della retta rappresentante la funzione $y = 4x$ è 4 in corrispondenza di ciascuno dei suoi punti.

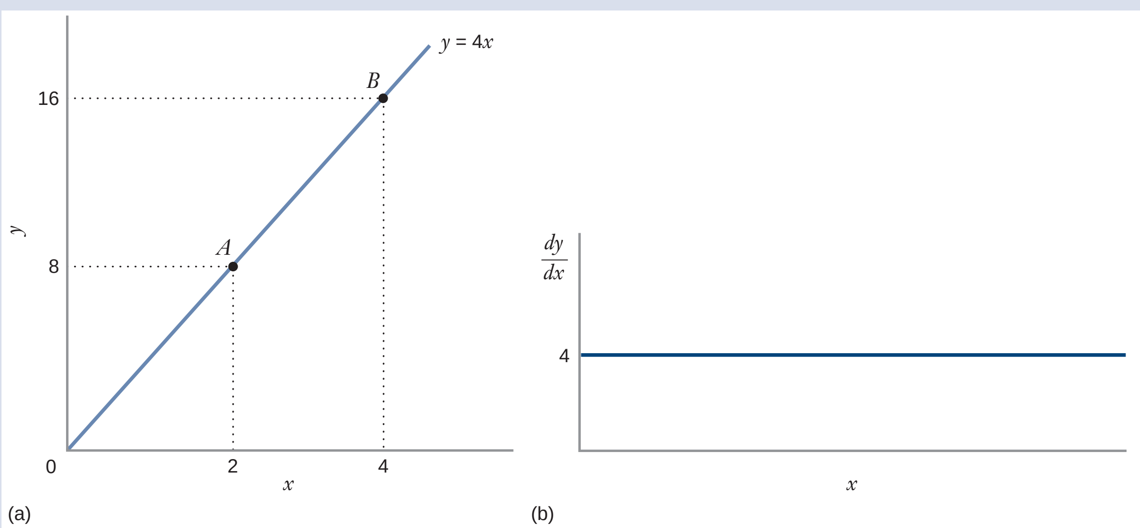


FIGURA A.5 Derivata di y = 4x
Il riquadro (a) mostra la funzione y = 4x. L'inclinazione di questo grafico è pari a 4. Utilizzando la regola di derivazione per le potenze, troviamo che la derivata di tale funzione è data da dy/dx = 4. Rappresentiamo graficamente anche la derivata, nel riquadro (b) della figura. Il fatto che la derivata sia sempre 4 significa che l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) non cambia mai e resta quindi sempre uguale a 4.

Esercizio svolto A.3

Derivata di una funzione con potenze

Consideriamo la funzione $y = 3x^2$, rappresentata graficamente nella Figura A.6(a).

Problema

Trova l'inclinazione di questa curva quando
(a) $x = -1$
(b) $x = 0$
(c) $x = +2$

Soluzione

(a) Sappiamo che $y = 3x^2$ è una funzione con potenza di quelle riconducibili all'Equazione (A.6); in questo caso, $a = 3$ e $b = 2$. Come mostrato nell'Equazione (A.7), la derivata è quindi $dy/dx = bax^{b-1} = 6x$. [Il grafico relativo a questa derivata è mostrato nella Figura A.6(b).] L'inclinazione della curva associata alla funzione $y = 3x^2$ risulta quindi pari a $6x$. Quando $x = -1$, il valore della derivata è allora: $dy/dx = 6(-1) = -6$. Da ciò ne consegue che, nel punto A del riquadro (a) della figura, l'inclinazione della curva $y = 3x^2$ è -6.
(b) Quando $x = 0$, il valore della derivate è: $dy/dx = 6(0) = 0$. Di conseguenza, l'inclinazione della curva $y = 3x^2$ nel punto B è zero.
(c) Quando $x = 2$, il valore della derivate è: $dy/dx = 6(2) = 12$. Questo significa che, in corrispondenza del punto C, la curva $y = 3x^2$ ha un'inclinazione pari a 12.

Consideriamo la Figura A.6. Possiamo determinare l'inclinazione della curva mostrata nel riquadro (a) per ciascuno dei punti presi in considerazione seguendo due percorsi differenti. Possiamo, innanzitutto, costruire il grafico della funzione in modo meticoloso e tracciare le tangenti alla curva nei punti considerati. Per esempio, se volessimo determinare la pendenza della curva nel punto A, potremmo tracciare la tangente in quel punto e misurarne l'inclinazione. Eseguendo il procedimento in maniera corretta, troveremmo un'inclinazione pari a -6. Tuttavia, questo è un approccio macchinoso e a forte rischio di errori, soprattutto tenendo conto del fatto che l'inclinazione della curva varia al variare di x. Risulta molto più facile e sicuro ricorrere al calcolo della derivata della funzione, per poi calcolare il valore della derivata stessa in corrispondenza di ciascuno dei punti a cui siamo interessati.

Esercizio svolto A.4

Utilità e utilità marginale

Nel Capitolo 3 (si veda la Figura 3.2) abbiamo esaminato la funzione di utilità $U(y) = \sqrt{y}$. All'interno di tale funzione, U rappresenta la variabile dipendente e y la variabile indipendente. Abbiamo inoltre osservato come l'utilità marginale corrispondente a questo tipo di funzione fosse: $MU(y) = 0{,}5\sqrt{y}$.

Problema

Dimostra che l'utilità marginale corrisponde effettivamente a tale funzione.

Soluzione

L'utilità marginale $MU(y)$ misura l'inclinazione della curva che rappresenta la funzione di utilità ed è quindi la derivata di tale funzione, ovvero dU/dy. Possiamo

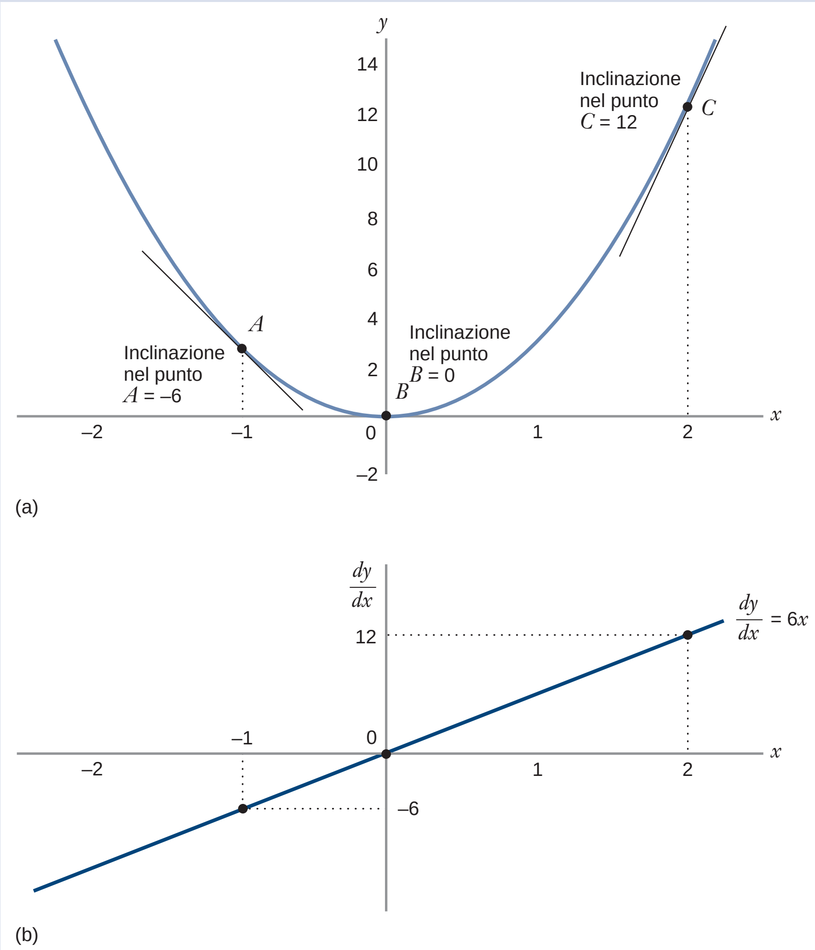


FIGURA A.6 Derivata di $y = 3x^2$
Il riquadro (a) mostra la funzione $y = 3x^2$. L'inclinazione del grafico varia nel momento in cui varia il valore di x. Utilizzando le regole di derivazione per le potenze, troviamo che la derivata è, in questo caso, $dy/dx = 6x$. Il riquadro (b) della figura propone proprio una rappresentazione grafica della derivata. Quando $x = –1$, il valore della derivata è –6. Quindi l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) è – 6 in corrispondenza di $x = –1$. In modo simile, la derivata della funzione indica che l'inclinazione della curva rappresentata nel riquadro (a) è invece pari a zero in corrispondenza di $x = 0$ ed è 12 in corrispondenza di $x = 2$.

calcolare agevolmente tale derivata, dal momento che anche $U(y) = \sqrt{y}$ *rappresenta una funzione con potenza, del tutto simile a quelle che abbiamo esaminato in precedenza. Tale funzione può infatti essere riscritta come:* $U(y) = y^{1/2}$. Possiamo quindi ricondurre questa particolare funzione di utilità al caso generale: $U = ay^b$, imponendo che, in questo caso specifico, $a = 1$ e $b = 1/2$. La derivata è quindi $dU/dy = bay^{b-1} = (1/2)\, y^{(1/2)-1} = 0{,}5\, y^{-1/2} = 0{,}5\sqrt{y}$.

Derivata di un logaritmo naturale

Una funzione logaritmica può essere formulata, in termini generali, come segue:

$$y = \ln x \tag{A.8}$$

L'espressione "ln" significa che stiamo considerando il logaritmo naturale del numero che segue. La derivata di questo genere di funzioni è:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \tag{A.9}$$

Derivata di somme e differenze

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano due diverse funzioni di x. Supponiamo inoltre che y sia la somma di f e g, ovvero $y = f(x) + g(x)$. La derivata di y rispetto a x è la somma delle derivate di f e g *rispetto a* x. In termini formali, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

Come esempio, supponiamo che $f(x) = 5x^2$ e che $g(x) = 2x$. Sia la funzione f che la funzione g sono potenze e le loro derivate sono, rispettivamente, $df/dx = 10x$ e $dg/dx = 2$. Se $y = f(x) + g(x) = 5x^2 + 2x$, allora $dy/dx = (df/dx) + (dg/dx) = 10x + 2$.

In modo analogo, se y fosse invece la differenza fra f e g, vale a dire $y = f(x) - g(x)$, avremmo allora che la derivata di y rispetto a x sarebbe la differenza fra le derivate di f e g:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Esercizio svolto A.5

Derivate di somme e differenze

Consideriamo la funzione di costo introdotta nell'Esercizio svolto A.1: $C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$

Problema

Trova il costo marginale di produzione quando:
(a) $Q = 2$
(b) $Q = 5$
(c) $Q = 6$

Soluzione

Il costo marginale $MC(Q)$ è la derivata della funzione del costo totale: dC/dQ. La funzione del costo totale è costituita da tre termini che formano una somma e una differenza di potenze. Applicando le regole di derivazione note, possiamo quindi concludere che il costo marginale è dato da: $C(Q) = 3Q^2 - 20Q + 40$.

(a) Quando $Q = 2$, il costo marginale è $MC(2) = 3(2)^2 - 20(2) + 40 = 12$. Tale costo marginale rappresenta l'inclinazione della curva del costo totale nel riquadro (a) della Figura A.2 in corrispondenza di un livello di produzione pari a 2. Il valore numerico del costo marginale è invece riportato nel riquadro (b) della stessa figura.
(b) Quando $Q = 5$, il costo marginale è $MC(5) = 3(5)^2 - 20(5) + 40 = 15$.
(c) Quando $Q = 6$, il costo marginale è invece $MC(6) = 3(6)^2 - 20(6) + 40 = 28$.

Nota che il costo marginale calcolato in questo problema coincide con quello riportato nella quarta colonna della Tabella A.1.

Derivata di un prodotto

Supponiamo che y sia il prodotto delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, ovvero $y = f(x)g(x)$. La derivata di y rispetto a x, in questo caso, è data da:

$$\frac{dy}{dx} = f\frac{dg}{dx} + g\frac{df}{dx}$$

Come esempio, assumiamo che $f(x) = x^2$ e che $g(x) = (6 - x)$. La funzione f è una potenza, mentre la funzione g è la somma di potenze. Le loro derivate sono quindi, rispettivamente, $df/dx = 2x$ e $dg/dx = -1$. Se $y = f(x)g(x) = x^2(6 - x)$, allora $dy/dx = f(dg/dx) + g(df/dx) = x^2(-1) + (6 - x)(2x) = -3x^2 + 12x$. Per verificare questa riposta, possiamo espandere la funzione $y = x^2(6 - x) = 6x^2 - x^3$ per poi calcolare la derivate di questa funzione, che è poi una differenza di potenze. Applicando le regole di derivazione ormai note, arriviamo alla conclusione che $dy/dx = 12x - 3x^2$.

Derivata di un quoziente

Supponiamo che y sia dato dal rapporto fra la funzione $f(x)$ e la funzione $g(x)$, vale a dire:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

La derivata di y rispetto a x è data da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Come esempio, assumiamo che $f(x) = x^2$ e che $g(x) = (6 - x)$. Come prima, tanto f quanto g sono potenze e già sappiamo che le loro derivate sono, rispettivamente, $df/dx = 2x$ e $dg/dx = -1$. Pertanto, se il quoziente è:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{(6-x)}$$

la derivata sarà quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g\frac{df}{dx} - f\frac{dg}{dx}}{g^2} = \frac{(6-x)(2x)-(x^2)(-1)}{(6-x)^2}$$

Esistono altre regole di derivazione relative ad altre forme funzionali tipiche. Tuttavia, le regole che abbiamo discusso in questo paragrafo sono le uniche di cui avremo bisogno per poter analizzare, attraverso il calcolo, le applicazioni economiche contenute in questo testo.

Per riassumere, le derivate sono utili per aiutarci a comprendere e a quantificare molti dei concetti economici riferiti al termine “marginale” (tra cui il concetto di utilità marginale, di costo marginale e di ricavo marginale).

- Supponiamo che la funzione che misura il livello complessivo di utilità di un individuo sia $U(Q)$. Il valore della derivata di tale funzione dU/dQ calcolato per un particolare livello di Q misura l’inclinazione della curva dell’utilità e fornisce una misura dell’utilità marginale in corrispondenza di quella data quantità. (Si vedano l’esercizio Svolto A.4 e la Figura 3.2.)

- Supponiamo che la funzione del costo totale di produzione sia $C(Q)$. Il valore della derivata dC/dQ in riferimento a un particolare livello di Q misura l'inclinazione della curva del costo totale nel punto considerato e fornisce una misura del costo marginale di produzione per quella quantità prodotta. (Si vedano l'Esercizio svolto A.5, la Tabella A.1 e la Figura A.2.)
- Supponiamo che la funzione del ricavo marginale sia $R(Q)$. Il valore della derivata dR/dQ in corrispondenza di un dato livello di Q rappresenta l'inclinazione della curva del ricavo totale e costituisce una misura del ricavo marginale per la quantità considerata.

A.5 Problemi di massimizzazione e minimizzazione

Le derivate possono essere utili anche per individuare i punti di massimo e di minimo delle funzioni. Supponiamo che y, la variabile dipendente, sia misurata lungo l'asse verticale di un grafico nel quale, come solito, riportiamo invece lungo l'asse orizzontale i valori della variabile indipendente x.

L'idea fondamentale che vogliamo sviluppare ora è questa: *il minimo o il massimo di una funzione vengono raggiunti solamente quando l'inclinazione della curva che rappresenta la funzione è uguale a zero.* In altre parole, nel punto di massimo o di minimo, la derivata dy/dx deve risultare uguale a zero.

Consideriamo un esempio in cui siamo interessati a individuare il punto di massimo di una funzione, in questo caso $y = -x^2 + 6x + 1$. La Figura A.7 mostra il grafico di tale funzione. Sappiamo che, in corrispondenza del punto di massimo, l'inclinazione della curva è nulla. Siccome l'inclinazione è data dalla derivata della funzione, dobbiamo quindi cercare quel particolare valore di x che rende la derivata uguale a zero. Osserviamo che y è una somma di potenze, per cui, sulla base delle solite regole di derivazione, possiamo concludere che la sua derivata è $dy/dx = -2x + 6$. Nel punto di massimo, la derivata si annulla: $dy/dx = -2x + 6 = 0$. La derivata diventa uguale a zero quando $x = 3$. Di conseguenza, il valore di massimo della funzione y risulta essere: $y = -3^2 + 6(3) + 1 = 10$.

Passiamo ora a una funzione con un punto di minimo. Consideriamo ancora la Figura A.6, in cui è mostrata la curva che rappresenta la funzione $y = 3x^2$. Possiamo calcolare la sua derivata per verificare se, effettivamente, tale funzione ha un minimo in corrispondenza di $x = 0$. Sappiamo che, nel punto di minimo, l'inclinazione della curva è pari a zero. Siccome l'inclinazione è data dalla derivata, dobbiamo individuare il valore di x che annulla la derivata. Come mostrato in precedenza, la derivata è data, in questo caso, da $dy/dx = 6x$. Nel punto di minimo, tale valore deve risultare nullo: $dy/dx = 6x = 0$. Di conseguenza, possiamo concludere che $x = 0$: (diviso? due punti?)in corrispondenza di tale valore di $x = 0$, y assume dunque il suo valore di minimo.

Come dimostrano questi esempi, nel momento in cui la derivata si annulla possiamo avere sia un punto di minimo che un punto di massimo. Anche se osserviamo il valore per cui $dy/dx = 0$, tale informazione non è di per sé sufficiente per poter dire se il punto individuato è un punto di massimo o di minimo. Per poter distinguere fra i due casi, occorre esaminare la derivata seconda di y rispetto a x, denotata con d^2y/dx^2. La derivata seconda di una funzione è la derivata della derivata prima della funzione stessa, dy/dx.

In altre parole, la derivata prima (dy/dx) della funzione indica l'inclinazione della relativa curva; la derivata seconda misura invece se l'inclinazione della curva è crescente o decrescente all'aumentare di x. Se la derivata seconda è negativa, l'inclinazione diviene meno positiva (o più negativa) all'aumentare di x. Se la derivata seconda risulta invece positiva, questo significa che l'inclinazione della curva diventa più positiva (o meno negativa) man mano che x aumenta.

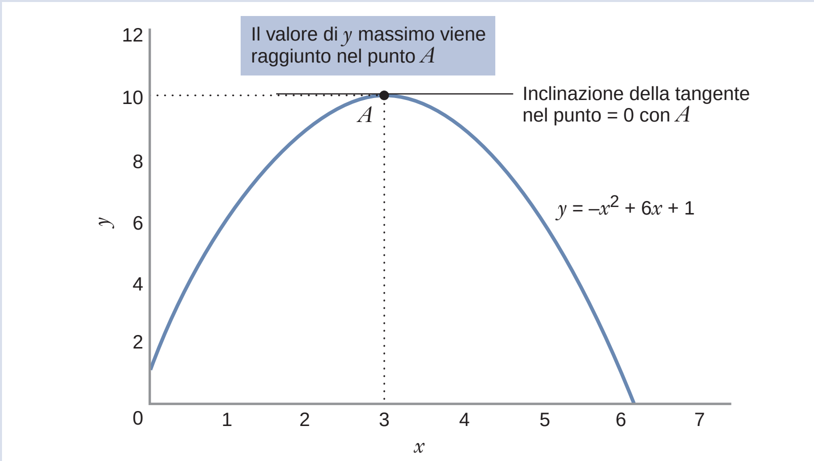


FIGURA A.7 Massimizzare una funzione
Il grafico illustra come la funzione in esame raggiunga il suo punto di massimo quando la sua inclinazione è zero. Nel punto *A*, in corrispondenza del quale $x = 3$, y raggiunge il suo valore massimo ($y = 10$). L'inclinazione della curva – ed, equivalentemente, il valore della derivata dy/dx – risulta quindi essere nulla nel punto A.

- Se nel punto considerato $dy/dx = 0$ e $d^2y/dx^2 < 0$, allora abbiamo individuato un punto di massimo della funzione.
- Se nel punto considerato $dy/dx = 0$ e $d^2y/dx^2 > 0$, allora abbiamo individuato un punto di minimo della funzione.

Per vedere come utilizzare la derivata seconda per capire se il punto individuato è un punto di massimo o di minimo, consideriamo ancora la funzione $y = -x^2 + 6x + 1$, mostrata nella Figura A.7. Abbiamo già calcolato che l'inclinazione della curva è zero in corrispondenza di $x = 3$, il valore di x che annulla la derivata della funzione, $dy/dx = -2x + 6$. Possiamo verificare che questo grafico raggiunge un punto di massimo (e non di minimo) studiando il segno della derivata seconda. La derivata di $-2x + 6$ rispetto a x rappresenta la derivata seconda, ragion per cui possiamo scrivere: $d^2y/dx^2 = -2$. Siccome la derivata seconda è negativa, l'inclinazione della curva diviene meno positiva nel momento in cui ci avviciniamo a $x = 3$ e diviene più negativa nel momento in cui ci allontaniamo da tale punto, considerando valori di $x = 3$. Questa è la dimostrazione che il grafico disegnato raggiunge un massimo per $x = 3$.

In maniera speculare, possiamo utilizzare la derivata seconda per mostrare come la curva rappresentata nella Figura A.6 raggiunga un minimo (e non un massimo) quando $x = 0$. Abbiamo già trovato che l'inclinazione della curva è nulla per $x = 0$, il valore di x che rende uguale a zero la derivata della funzione, $dy/dx = 6x$. La derivata di $6x$ rispetto a x è la derivata seconda della funzione: $d^2y/dx^2 = 6$. Dato che la derivata seconda è positiva, sappiamo che l'inclinazione del grafico diviene meno negativa quando ci avviciniamo a $x = 0$ partendo da valori di x inferiori e diviene invece più positiva se ci allontaniamo da $x = 0$, passando a valori di x sempre più elevati. Tutto ciò conferma come la curva abbia un minimo in corrispondenza di $x = 0$.[2]

Esercizio svolto A.6

Utilizzare la derivata per individuare il minimo

Consideriamo una volta ancora la funzione del costo totale: $C(Q) = Q^3 - 10Q^2 + 40Q$.

La funzione del costo medio $AC(Q)$ è data da $C(Q)/Q$: $AC(Q) = Q^2 - 10Q + 40$.

Il riquadro (b) della Figura A.2 mostra la curva del costo medio relativa a tale funzione.

Problema

(a) Attraverso il calcolo della derivata, verifica che il minimo della funzione del costo medio viene raggiunto quando $Q = 5$. Mostra inoltre che, nel punto di minimo, il valore del costo medio è pari a 15.

(b) Attraverso il calcolo della derivata seconda, verifica che il punto individuato rappresenti effettivamente un punto di massimo e non di minimo.

Soluzione

(a) La curva del costo medio raggiunge il suo minimo quando la sua inclinazione è zero, il che avviene quando la sua derivata dAC/dQ diventa uguale a zero. Osserviamo che la funzione $AC(Q)$ è una somma di potenze. La sua derivata è quindi: $dAC/dQ = 2Q - 10$. Imponendo che tale derivata sia nulla, scopriamo che la quantità che minimizza il costo medio è $Q = 5$. Il valore di minimo del costo medio è quindi $AC(5) = 5^2 - 10(5) + 40 = 15$.

(b) La derivata seconda della funzione del costo medio è $d^2AC/dQ^2 = 2$. Siccome la derivata seconda è positiva, l'inclinazione del grafico diviene sempre meno negativa quanto più ci si avvicina a $Q = 5$ partendo da valori inferiori e diventa sempre più positiva allontanandosi da questo punto e passando quindi a livelli di Q *superiori a* 5. Questo conferma che la curva del costo medio ha un punto di minimo (e non di massimo) in corrispondenza di $Q = 5$.

Regola per la scelta della quantità ottimale

Una volta che è chiaro come utilizzare il calcolo per individuare massimi e minimi delle funzioni, possiamo provare ad applicare queste tecniche a semplici problemi economici. Partiamo quindi dalla determinazione della regola per la scelta della quantità ottimale di output da parte di un'impresa che intenda massimizzare i propri profitti, assumendo i prezzi come dati. Nel Capitolo 9 [si veda in particolare l'Equazione (9.1)] abbiamo visto come un'impresa price-taker massimizzi il proprio profitto producendo esattamente quel livello di output in corrispondenza del quale il costo marginale risulta uguale al prezzo. La variabile dipendente è, in questo caso, il profitto dell'impresa (denotato con π) che corrisponde alla diffe-

[2] L'analisi condotta in questa appendice mostra come applicare il calcolo delle derivate per individuare massimi e minimi locali. Tuttavia, molte funzioni sono caratterizzate da più punti di minimo e/o di massimo. Per poter individuare il massimo globale di una funzione occorre confrontare i valori assunti dalla funzione in corrispondenza di tutti i punti di massimo locale individuati e identificare quello in corrispondenza del quale la funzione assume il valore più elevato. Allo stesso modo, per individuare il minimo globale occorre confrontare i valori assunti dalla funzione in tutti i punti di minimo locale e trovare quello in corrispondenza del quale la funzione assume il valore più basso.

renza fra i ricavi complessivi dell'impresa (dati dal prezzo di mercato, P, moltiplicato per la quantità prodotta e venduta, Q) e i costi totali di produzione, $C(Q)$. Possiamo quindi scrivere:

$$\pi = PQ - C(Q)$$

Siccome possiede solo una piccola quota di mercato, l'impresa non controlla il prezzo di mercato P, che va quindi considerato come dato. Per massimizzare i suoi profitti, l'impresa deve quindi scegliere il livello di produzione Q in modo che l'inclinazione della curva dei profitti risulti pari a zero (si veda la Figura 9.1).

In termini algebrici, l'impresa deve individuare il valore di Q tale per cui $d\pi/dQ = 0$. La derivata della funzione π è:

$$\frac{d\pi}{dQ} = P - \frac{dC}{dQ}$$

Siccome dC/dQ rappresenta il costo marginale di produzione, per poter massimizzare i suoi profitti l'impresa deve quindi scegliere Q in modo da uguagliare il costo marginale al prezzo, producendo in modo da verificare la condizione $d\pi/dQ = 0$. Allo stesso modo, abbiamo visto nel Capitolo 11 [si veda in particolare l'Equazione (11.1)] che, per massimizzare i propri profitti, un monopolista deve scegliere il suo livello di output in modo da uguagliare ricavi e costi marginali. Anche in questo caso, la variabile dipendente è data dai profitti (π), ovvero dalla differenza fra il ricavo totale dell'impresa, $R(Q)$, e il costo totale di produzione $C(Q)$. In termini matematici, possiamo quindi scrivere che la funzione obiettivo del monopolista è:

$$\pi = R(Q) - C(Q)$$

Per poter massimizzare i propri profitti, il monopolista deve individuare il livello di produzione Q in corrispondenza del quale la curva del profitto ha inclinazione pari a zero (si veda la Figura 11.2). In termini algebrici, l'impresa sceglie di produrre quella quantità Q per cui $d\pi/dQ = 0$. La derivata di π è:

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dR}{dQ} - \frac{dC}{dQ}$$

Tale derivata corrisponde quindi alla differenza tra il ricavo marginale (dR/dQ) *e il costo marginale di produzione* (dC/dQ). Di conseguenza, il monopolista sceglierà Q in modo da rendere uguali ricavi e costi marginali; produrrà quindi in modo da verificare la condizione $d\pi/dQ = 0$ e questo gli consentirà di ottenere il massimo profitto possibile.

A.6 Funzioni a più variabili

Fino a questo punto abbiamo considerato unicamente funzioni che dipendevano da una sola variabile. Tuttavia, in molte situazioni, la variabile dipendente risulta legata a due o più variabili indipendenti. Tanto per fare un esempio, i profitti complessivi di un'impresa (denotati sempre con π) possono dipendere da due diverse quantità di output, se l'impresa produce due beni diversi: denotiamo con $Q1$ la quantità prodotta del primo bene e con $Q2$ la quantità prodotta del secondo. Supponiamo che la funzione dei profitti dell'impresa in questione sia la seguente:

$$\pi = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1Q_2 + 8Q_2 - 2(Q_2)^2 \qquad \text{(A.10)}$$

La Figura A.8 mostra il grafico relativo a questa funzione. Il grafico è in tre dimensioni dal momento che vi sono tre variabili da considerare: la variabile dipendente, ovvero il profitto, è indicata sull'asse verticale, mentre le due variabili indipendenti, $Q1$ e $Q2$, sono misurate lungo gli altri due assi. Come mostra il grafico, la funzione dei profitti può essere rappresentata come una sorta di "collina". L'impresa può massimizzare i suoi profitti nel punto A, producendo $Q1 = 4$ e $Q2 = 3$; tale combinazione le garantisce un profitto complessivo pari a $\pi = 38$.

Vediamo come è possibile utilizzare il calcolo per individuare i valori delle variabili indipendenti ($Q1$ e $Q2$ in questo caso) che massimizzano la variabile dipendente (π). Per fare ciò, occorre capire come ciascuna delle variabili indipendenti influenza la variabile dipendente, mantenendo *costante il livello di tutte le altre variabili indipendenti*.

Consideriamo allora il punto B del grafico, dove $Q1 = 4$, $Q2 = 2$ e $\pi = 36$. Come si evince dal disegno, questa non è certamente la combinazione degli output che massimizza il profitto. Trovandosi in questo punto, l'impresa può quindi chiedersi in che modo un incremento di $Q2$ possa influenzare π, considerando fisso il valore

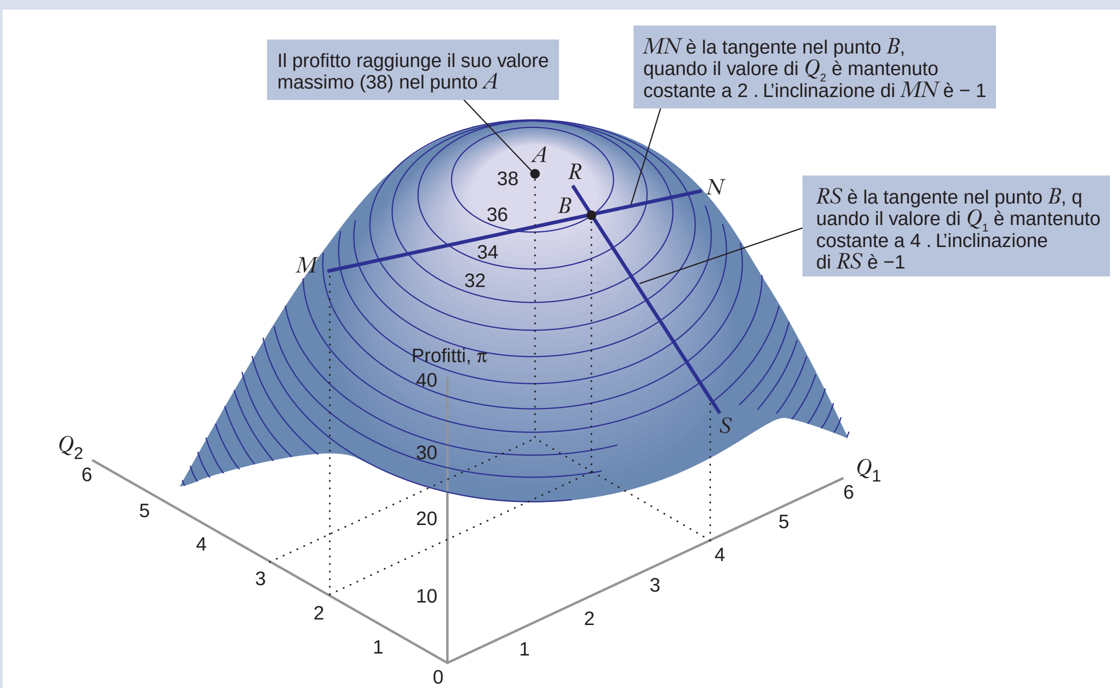


FIGURA A.8 Massimizzare una funzione a due variabili
Una funzione raggiunge il suo massimo quando l'inclinazione della curva che la rappresenta è pari a zero. Nel punto *A*, quando $Q1 = 4$ e $Q2 = 3$, la funzione del profitto raggiunge il suo valore massimo (38). L'inclinazione della "collina" del profitto è zero in tutte le direzioni (ed, equivalentemente, i valori delle derivate parziali $\partial\pi/\partial Q1$ e $\partial\pi/\partial Q2$ sono entrambi zero nel punto *A*). Nel punto *B*, quando $Q1 = 4$ e $Q2 = 2$, la funzione del profitto raggiunge un valore più basso (36). L'inclinazione della "collina" del profitto non è quindi pari a zero in tutte le direzioni: in *B*, infatti, $\partial\pi/\partial Q2 = +4$. Questo significa che l'inclinazione della "collina" a fronte di un aumento di $Q2$ (mantenendo però sempre $Q1 = 4$) è pari a 4. Questa è anche l'inclinazione della retta tangente *RS*. In *B*, inoltre, $\partial\pi/\partial Q1 = -1$. Questo significa che l'inclinazione della "collina" a fronte di un aumento di $Q1$ (mantenendo però sempre $Q2 = 2$) è pari a - 1. Questa è anche l'inclinazione della retta tangente *MN*.

dell'altra variabile indipendente $Q1$. Per ottenere questa informazione, calcoliamo la derivata parziale di π *rispetto a* $Q2$, denotata con $\partial\pi/\partial Q2$. Per calcolare tale derivata, consideriamo la derivata dell'Equazione (A.10) assumendo però il livello di $Q1$ come una costante.

Quando facciamo ciò, i primi due termini dell'Equazione (A.10) diventano costanti, dal momento che essi dipendono esclusivamente da $Q1$; la derivata parziale d questi due termini rispetto a $Q2$ è pertanto pari a zero. La derivata parziale del terzo termine ($Q1Q2$) rispetto a $Q2$ è invece $Q1$. Se consideriamo, infine, la derivata parziale degli ultimi due termini $[8Q2 - 2(Q2)^2]$ rispetto a $Q2$, otteniamo invece $8 - 4Q2$. Mettendo insieme tutte queste informazioni, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = Q_1 + 8 - 4Q_2 \tag{A.11}$$

L'Equazione (A.11) fornisce una misura del profitto marginale (quello che viene, talvolta, definito attraverso l'espressione "profittabilità marginale") di $Q2$. Tale valore rappresenta il saggio al quale varia il profitto complessivo nel momento in cui si varia $Q2$ e si mantiene costante $Q1$.

In altri termini, il profitto marginale misura la pendenza della "collina" del profitto. Consideriamo infatti la Figura A.8. La retta che abbiamo chiamato *RS* è la tangente alla "colina" nel punto B; muovendosi lungo tale retta, $Q1$ rimane sempre costante ($Q1 = 4$). Possiamo determinare l'inclinazione della retta *RS* calcolando la derivata parziale $\partial\pi/\partial Q2 = Q1 + 8 - 4Q2$ in corrispondenza dei valori $Q1 = 4$ e $Q2 = 2$. Il valore che ne risulta è quindi: $\partial\pi/\partial Q2 = (4) + 8 - 4(2) = 4$. L'inclinazione di *RS* (e quindi l'inclinazione della "collina" del profitto in corrispondenza del punto *B* e nella direzione di un aumento di $Q2$) è pertanto pari a 4.

Per provare a rendere ancora più chiaro il significato della derivata parziale, consideriamo una diversa rappresentazione della funzione del profitto, facendo riferimento alla Figura A.9. All'interno di questo grafico è stata riportata una sezione della "collina" dei profitti, che mostra come appare tale "collina" nel momento in cui facciamo variare $Q2$ mantenendo però costante $Q1$ (assumiamo sempre $Q1 = 4$). Il punto *B* di questa figura corrisponde perciò esattamente al punto *B* della Figura A.8. Anche in questo grafico abbiamo tracciato la retta *RS*, tangente alla curva dei profitti proprio nel punto *B*. (La retta tangente *RS* è, ovviamente, la stessa della Figura A.8.) La derivata parziale dei profitti rispetto a $Q2$ (denotata con $\partial\pi/\partial Q2$) misura l'inclinazione della retta tangente [3], che, in corrispondenza del punto *B*, è pari a 4.

In maniera analoga, potremmo essere interessati a capire come un incremento di $Q1$ possa modificare il valore di π, mantenendo costante, questa volta, l'altra variabile indipendente, ovvero $Q2$. Per ottenere l'informazione desiderata, occorre calcolare la derivata parziale di π rispetto a $Q1$, denotata con $\partial\pi/\partial Q1$. Calcoliamo quindi la derivata dell'Equazione (A.10), assumendo $Q2$ come costante: gli ultimi due termini dell'Equazione (A.10) dovranno quindi essere considerati come delle costanti, dal momento che dipendono unicamente da $Q2$. La derivata parziale di

[3] Un modo alternativo per cogliere il significato della derivate parziale illustrato nella Figura A.9 è quello di sostituire $Q_1 = 4$ all'interno della funzione dei profitti: $\pi = 13Q_1 - 2(Q_1)^2 + Q_1Q_2 + 8\,Q_2 - 2(Q_2)^2$. I profitti diventano quindi $\pi = 20 + 12\,Q_2 - 2(Q_2)^2$. Quella appena scritta è l'equazione relativa alla curva dei profitti rappresentata nella Figure A.9, in cui si è assunto che Q1 sia costante e, in particolare, sia uguale a 4. L'inclinazione di tale curva è data da: $d\pi/dQ_2 = 12 - 4Q_2$. Nel punto B, in cui $Q_2 = 2$, troviamo allora che $d\pi/dQ_2 = 4$ e questa è l'inclinazione della retta tangente nel punto, ovvero della retta RS.

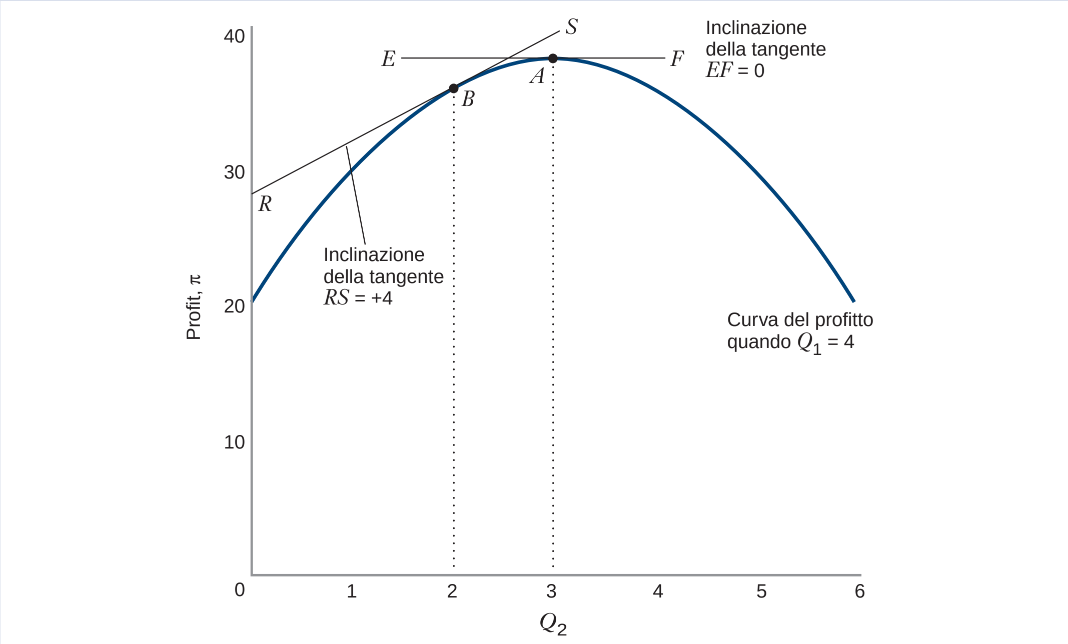


FIGURA A.9 Come illustrare la derivata parziale
Il grafico mostra una sezione della "collina " dei profitti rappresentata nella Figura A.8. Abbiamo rappresentato questa sezione per mostrare come appare la "collina" quando si fa variare Q2 ma si mantiene costante Q1 (in questo caso, Q1 = 4). Il punto *B* di questa figura corrisponde quindi al punto *B* della Figura A.8. Abbiamo inoltre tracciato la retta tangente alla "collina" dei profitti nel punto *B*. Il valore della derivata parziale dei profitti rispetto a Q2 (denotata con $\partial\pi/\partial Q2$) misura l'inclinazione di questa tangente. Nel punto *A*, Q1 = 4 e Q2 = 3 e i profitti raggiungono il valore massimo. Il punto *A* di questa figura corrisponde al punto *A* della Figura A.8. Siccome abbiamo raggiunto la sommità della "collina" dei profitti, l'inclinazione di tale "collina" nel punto considerato è pari a zero 0. Ne consegue che: $\partial\pi/\partial Q2 = 0$.

questi termini rispetto a $Q1$ è pertanto zero. La derivata parziale del terzo termine ($Q1Q2$) rispetto a $Q1$ è invece $Q2$, mentre la derivata parziale rispetto a $Q1$ dei primi due termini risulta essere 13 – 4$Q1$. Mettendo insieme tali informazioni, possiamo allora concludere che, in questo caso:

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 13 - 4Q_1 + Q_2 \qquad \text{(A.12)}$$

L'Equazione (A.12) fornisce una misura del profitto marginale di $Q1$, ovvero del tasso al quale varia il profitto complessivo a fronte di una variazione di $Q1$, nell'ipotesi che $Q2$ rimanga invece fisso. Calcoliamo ora il valore assunto dalla derivata parziale appena calcolata nel punto *B* della Figura A.8. Quando $Q1 = 4$ e $Q2 = 2$, il profitto marginale di $Q1$ è dato da: $\partial\pi/\partial Q1 = 13 - 4(4) + 2 = -1$.

Tracciamo la retta tangente alla "collina" dei profitti nel punto *B*, mantenendo costante il valore di $Q2$ (in questo caso, $Q2 = 2$). In base ai calcoli appena fatti, l'inclinazione di tale retta (indicata con MN) è quindi pari a –1.

Individuare il massimo o il minimo

Come possiamo individuare il punto di massimo della "collina" dei profitti della Figura A.8? In corrispondenza del punto di massimo, l'inclinazione della "collina" deve risultare zero in qualsiasi direzione; questo significa che, nel punto di massimo, *tutte le derivate parziali della funzione devono essere pari a zero. In riferimento* *al nostro esempio, dobbiamo quindi verificare in quale punto sia ∂π/∂Q1 che ∂π/∂Q2 risultano essere nulle:*

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 13 - 4Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = Q_1 + 8 - 4Q_2 = 0$$

Risolvendo questo sistema di due equazioni, troviamo che *Q*1 = 4 e *Q*2 = 3. Quando queste sono le quantità prodotte dei due beni, l'impresa si colloca sulla sommità della "collina" dei profitti, rappresentata dal punto *A* della Figura A.8.[4]

Consideriamo ora il punto *A* della Figura A.9, in cui *Q*1 = 4 e *Q*2 = 3 e in corrispondenza del quale il profitto dell'impresa risulta essere massimo. Il punto *A* di questa figura coincide con il punto *A* della Figura A.8: dal momento che abbiamo raggiunto il massimo della curva dei profitti, l'inclinazione della curva in quel punto dovrà risultare pari a zero. Di conseguenza, nel punto A la derivata parziale ∂π/∂*Q*2 si annulla.

Per fare pratica con le derivate parziali, può essere utile provare a risolvere i seguenti esercizi.

Esercizio svolto A.7

Utilità marginale con due variabili indipendenti

Nel Capitolo 3 (e più precisamente, nell'Esercizio svolto 3.1) abbiamo introdotto la funzione di utilità $U = \sqrt{xy}$. In questo caso, la variabile dipendente è rappresentata da *U* mentre le variabili indipendenti sono due, ovvero *x* e *y*. Le utilità marginali corrispondenti sono, rispettivamente, $MUx = \sqrt{y}/(2\sqrt{x})$ e $MUy = \sqrt{x}/(2\sqrt{y})$.

Problema

Attraverso il calcolo delle derivate parziali, verifica che le espressioni scritte per le utilità marginali siano effettivamente corrette.

Soluzione

Può essere utile riscrivere la funzione di utilità come $U = x^{1/2}\, y^{1/2}$. L'utilità marginale di *x* è la derivata di *U* rispetto a *x*, vale a dire ∂*U*/∂*x*. Per calcolare tale derivata, consideriamo *y* come una costante. Dobbiamo quindi limitarci a calcolare la derivata del termine compreso fra parentesi: $U = [x^{1/2}]\, y^{1/2}$. (Il termine $y^{1/2}$ rappresenta ora una semplice costante moltiplicativa.) La funzione $x^{1/2}$ è una potenza e la sua derivata è pertanto: $(1/2)x^{-1/2}$, che equivale a scrivere $1/(2\sqrt{x})$. L'utilità marginale di x è quindi $MUx = \sqrt{y}/(2\sqrt{x})$.

In modo del tutto simile, verifichiamo l'espressione per l'utilità marginale di *y* calcolando la derivata parziale di *U* rispetto a *y*, ovvero ∂*U*/∂*y*. In questo caso, è la variabile *x* a dover essere considerata come fissa e l'unica derivata che dobbiamo

[4] Per essere sicuri di essere in un punto di massimo (o comunque per poter distinguere fra un massimo e un minimo) dovremmo esaminare le condizioni del secondo ordine per l'ottimizzazione. In questa appendice non tratteremo tali condizioni nel caso di funzioni a più variabili; per approfondire la questione, rimandiamo dunque a un qualsiasi testo di base di analisi matematica. Bisogna inoltre ricordare che le tecniche illustrate in questa appendice consentono di individuare il punto in cui la funzione ha un massimo o un minimo, ma non consentono di distinguere tra punti di massimo e minimo globali o locali (si riveda, a tal proposito, la nota a piè di pagina numero 2).

calcolare è quella del termine compreso fra parentesi: $U = x^{1/2}$ [$y^{1/2}$]. La funzione $y^{1/2}$ *è una potenza e la sua derivata è quindi:* (1/2) $y^{-1/2}$ oppure, scritta in altra forma, $1/(2\sqrt{y})$. L'utilità marginale di y corrisponde quindi a $MUy = \sqrt{x}/(2\sqrt{y})$.

Esercizio svolto A.8
Costi marginali con due variabili indipendenti

Problema
Supponiamo che il costo totale di produzione legato alla realizzazione di due distinti prodotti sia dato dalla seguente funzione:

$$C = Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2$$

La quantità $Q1$ indica il numero di unità prodotte del primo bene e la quantità $Q2$ il numero di unità prodotte del secondo. Assumendo $Q_1 = 16$ e $Q_2 = 1$, trova il costo marginale di produzione per il primo bene (denotato con MC_1).

Soluzione
Può essere utile riscrivere la funzione del costo totale come $C = Q_1 + (Q_1)^{1/2}(Q_2)^{1/2} + Q_2$. Il costo marginale di $Q1$ è la derivata parziale della funzione C rispetto a Q_1, vale a dire $\partial C/\partial Q_1$. Per calcolare tale derivata, consideriamo $Q2$ come una costante. Passiamo ora a esaminare ciascuno dei tre termini della funzione di costo.

1. Per il primo termine, la derivata di Q_1 rispetto a Q_1 è semplicemente 1.
2. Per il secondo termine, occorre derivare esclusivamente il termine contenuto fra parentesi: $[(Q_1)^{1/2}]$ $(Q_2)^{1/2}$. (Il termine $(Q_2)^{1/2}$ rappresenta ora solo più una costante moltiplicativa.) La funzione $(Q_1)^{1/2}$ è una potenza e la sua derivata è $(1/2)$ $(Q_1)^{-1/2}$, che può essere riscritta come $1/(2\sqrt{Q_1})$. In conclusione, la derivata del secondo termine è $\sqrt{Q_2}/(2\sqrt{Q_1})$.
3. Nel caso del terzo termine, Q_2 è solo più una costante e, dato che la derivata di una costante è zero, la derivata del terzo termine è zero.

Il costo marginale di produzione del primo bene è quindi $MC_1 = 1 + \sqrt{Q_2}/(2\sqrt{Q_1})$. Possiamo ora valutare il costo marginale in riferimento a ogni possibile livello dell'output. Se, per esempio, poniamo $Q_1 = 16$ e $Q_2 = 1$, troviamo che $MC_1 = 1 + \sqrt{1}/(2\sqrt{16}) = 9/8$. In alter parole, quando l'impresa produce 16 unità del primo bene e 1 unità del secondo, il costo marginale della prima produzione è pari a 9/8.

A.7 Ottimizzazione vincolata

Come spiegato nel Capitolo 1, le decisioni economiche vengono solitamente prese cercando di massimizzare o minimizzare il valore di determinate variabili economiche, tra le quali il profitto, il costo di produzione o l'utilità. Tuttavia, normalmente gli individui devono scegliere fronteggiando dei vincoli, che restringono le loro possibilità di scelta. Questa è la ragione per cui l'economia politica viene spesso definita come la scienza delle scelte vincolate. I problemi di ottimizzazione vincolata possono includere un'ampia varietà di restrizioni e possono essere applicati per esaminare un'ampia varietà di decisioni. Nei prossimi due paragrafi presenteremo due diversi approcci per la risoluzione dei problemi di minimizzazione o di massimizzazione vincolata. Per rendere più agevole la spiegazione, focalizziamoci su problemi con due variabili di scelta, x e y, e un solo vincolo, sebbene i principi che applicheremo in questo caso possano essere facilmente generalizzati in modo da estenderli anche a problemi più complicati.

Supponiamo quindi che la *funzione obiettivo* (la funzione che si intende massimizzare o minimizzare) sia una funzione del tipo $F(x, y)$ e ipotizziamo che il vincolo da soddisfare nella scelta sia rappresentato dalla funzione $G(x, y) = 0$.

Nel caso in cui l'obiettivo è quello della massimizzazione, il problema di ottimizzazione vincolata può allora essere espresso in questi termini:

$$\max_{(x,y)} F(x, y)$$

$$G(x, y) = 0$$

La prima riga identifica la funzione che si intende massimizzare. (Se la funzione obiettivo dovesse invece essere minimizzata, dovremmo sostituire l'espressione "max" con l'espressione "min") Sotto l'espressione "max" compare la lista delle variabili (in questo caso x e y) rispetto alle quali l'individuo deve massimizzare, assegnando loro il valore che consente di ottenere il valore massimo della funzione.

La seconda riga rappresenta invece il vincolo di cui bisogna tener conto al momento della scelta. Occorre infatti scegliere dei valori di x e di y che soddisfino la condizione $G(x, y) = 0$. Nei Capitoli 3 e 4 abbiamo considerato un esempio di un problema di ottimizzazione vincolata, affrontando il problema delle scelte del consumatore. Il consumatore vuole infatti massimizzare la propria soddisfazione, compatibilmente con il vincolo rappresentato dal proprio reddito disponibile. In quel contesto, la variabile F era rappresentata dalla funzione di utilità e la funzione G dal vincolo di bilancio.

Nel Capitolo 7 abbiamo invece esaminato le scelte di un'impresa in riferimento all'individuazione della combinazione di minimo costo dei suoi input. In questo caso, l'impresa vuole minimizzare i costi di produzione, dato un livello di produzione che si intende realizzare. La funzione obiettivo è quindi la funzione del costo totale, mentre il vincolo è qui rappresentato dal livello di produzione richiesto.

In questo paragrafo mostreremo come è possibile risolvere tali problemi di ottimizzazione vincolata attraverso la sostituzione del vincolo all'interno della funzione obiettivo. Una volta fatto ciò, saremo poi in grado, attraverso il calcolo, di individuare i punti di massimo e di minimo che stiamo ricercando.

La procedura per la risoluzione di questi problemi è illustrata nei prossimi due esercizi svolti.

Esercizio svolto A.9
Il problema della pubblicità della birra

Nel Capitolo 1 viene descritto il problema che deve fronteggiare il manager di una piccola fabbrica di birra che produce birre ad alta fermentazione di elevata quantità (qualità). Il manager ha un budget di spesa per la campagna promozionale del prodotto pari a un milione di euro, che può spendere per fare pubblicità in televisione oppure alla radio. La Tabella 1.1 illustra l'andamento delle vendite di questa birra a seguito della pubblicità realizzata. Nel Capitolo 1 non abbiamo però considerato la funzione che esprime la relazione fra vendite e passaggi pubblicitari. Supponiamo ora che le nuove vendite di birra (indicate con B e misurate in barilotti) dipendano da quanta pubblicità si decide di fare in televisione (indicheremo tale variabile con T, misurandola in centinaia di migliaia di euro) e da quanta pubblicità si decide di fare in radio (denotiamo tale variabile con R e anche in questo caso assumiamo come unità di misura le centinaia di migliaia di euro). Assumiamo che la relazione sia la seguente:

$$B(T, R) = 5000T - 250T^2 + 1000R - 50R^2$$

La funzione $B(T,R)$ è la funzione obiettivo, dato che rappresenta la funzione che il manager dell'azienda intende massimizzare. Tuttavia, il manager può spendere, al massimo, solo un milione di euro per finanziare la campagna pubblicitaria, per cui, la sua è una scelta vincolata e il vincolo, in questo caso, è dato da $T + R = 10$. Il problema di ottimizzazione qui considerato è pertanto:

$$\max_{(T,R)} F(T,R) \qquad \text{(A.13)}$$
$$T + R = 10$$

Problema

Risolvi il problema del manager, individuando la combinazione ottimale di pubblicità alla radio e pubblicità in televisione.

Soluzione

In questo problema, il vincolo ha una forma piuttosto semplice: $T + R = 10$. Dal vincolo, ricaviamo quindi che $R = 10 - T$. Possiamo allora sostituire tale espressione al posto di R all'interno della funzione obiettivo, ottenendo:

$$\begin{aligned} B &= 5000T - 250T^2 + 1000R - 50R^2 \\ &= 5000T - 250\mathrm{T}^2 + 1000(10 - T) - 50(10 - T)^2 \\ &= 5000T - 300T^2 + 5000 \end{aligned}$$

La nuova funzione obiettivo che abbiamo ottenuto ($B = 5000T - 300T^2 + 5000$) incorpora già il vincolo al suo interno, dal momento che abbiamo sostituito una delle variabili di scelta con la sua espressione ricavata proprio dal vincolo stesso. Possiamo ora scegliere quanta pubblicità fare in televisione calcolando semplicemente la derivata prima della funzione rispetto a T e imponendo che tale derivata sia pari a zero:

$$\frac{dB}{dT} = 5000 - 600T = 0$$

È possibile dimostrare che tale condizione è soddisfatta (e quindi che la derivata in questione si annulla) in corrispondenza di $T = 8{,}33$; il manager troverà quindi ottimale spendere, all'incirca, €833 333 in passaggi pubblicitari alla televisione. Utilizzando la relazione $R = 10 - T$ (dato che il vincolo deve sempre e comunque essere soddisfatto) possiamo allora concludere che $R = 1{,}67$ e la spesa per i passaggi pubblicitari in radio sarà, all'incirca, pari a €166 667.

Questa soluzione ("esatta") non è molto lontana dall'approssimazione a cui si è giunti nel Capitolo 1, utilizzando esclusivamente il metodo della tabella.

Esercizio svolto A.10

Il problema delle recinzioni del pastore

Sempre nel Capitolo 1 è stato descritto un altro esempio di ottimizzazione vincolata, questa volta relativo alle recinzioni di una fattoria. Il pastore deve costruire una recinzione rettangolare per il suo gregge di pecore, ha a disposizione F metri di assi di legno e non può acquistare altro legname. Il pastore può però scegliere le dimensioni del recinto, che avrà una lunghezza di L metri e una larghezza di W *metri*. L'obiettivo del pastore è quello di scegliere le due dimensioni in modo da massimizzare l'area a disposizione del suo gregge, per cui la funzione obiettivo è, semplicemente, LW. Il vincolo che si deve fronteggiare in questo caso è costituito dal fatto che, dato il legname a disposizione, il perimetro del recinto (in metri) non può superare F. Il problema descritto nel Capitolo 1 può quindi essere espresso, formalmente, come segue:

$$\max_{(L,W)} LW \tag{A.14}$$
$$2L + 2W \leq F$$

Siccome il pastore utilizzerà tutto il legname disponibile (volendo massimizzare l'area), possiamo essere certi che il vincolo sarà, in realtà, rappresentato da una uguaglianza. Possiamo allora sostituire, all'interno del vincolo, il segno di ≤ con il segno di =. Il problema di ottimizzazione si semplifica quindi come segue:

$$\max_{(L,W)} LW \tag{A.15}$$
$$2L + 2W = F$$

Problema

Risolvi il problema di ottimizzazione del pastore, determinando le dimensioni ottimali del recinto.

Soluzione

Anche in questo caso, il vincolo ha una forma piuttosto semplice: $2L + 2W = F$. Dal vincolo possiamo quindi ricavare che $W = (F/2) - L$. Sostituendo tale espressione al posto di W all'interno della funzione obiettivo originaria (LW), troviamo la nuova formulazione della funzione obiettivo che incorpora al suo interno il vincolo:

$$\text{Area} = LW = L\left(\frac{F}{2} - L\right) = \frac{FL}{2} - L^2$$

Possiamo ora scegliere la lunghezza ottimale del recinto, L, calcolando la derivata di tale funzione rispetto a L e imponendo che la derivata sia zero:

$$\frac{d\text{Area}}{dL} = \frac{F}{2} - 2L = 0$$

Risolvendo per L, scopriamo che tale condizione è soddisfatta per $L = F/4$. Sapendo che $W = (F/2) - L$, è possibile determinare la larghezza ottimale: $W = F/4$. La soluzione individuata ci porta quindi a concludere che, per massimizzare l'area recintata, il rettangolo deve, in realtà, essere un quadrato di lato $F/4$. Prima di abbandonare questo esempio, è bene osservare che possiamo utilizzare i risultati individuati per modellare gli esercizi di statica comparata descritti nel Capitolo 1. In questo problema, la variabile esogena (quello il cui valore viene preso per dato dal pastore) è F, il numero di metri di legno a disposizione. Le variabili endogene (quelle il cui valore viene scelto dal pastore) sono invece la lunghezza, L, e la larghezza, W, del rettangolo; quindi l'area del rettangolo (LW) è una variabile endogena, dal momento che il suo valore dipende dalla decisioni del pastore. Attraverso il calcolo delle derivate, siamo quindi in grado di rispondere alle seguenti domande:

1. Come varia la lunghezza del rettangolo nel momento in cui varia la quantità di legname disponibile (e quindi il perimetro massimo)?

Sappiamo che $L = F/4$. Di conseguenza, sappiamo che $dL/dF = 1/4$. La lunghezza aumenta quindi di 25 cm nel momento in cui il perimetro massimo aumento di un metro.

2. Come varia la larghezza del rettangolo nel momento in cui varia la quantità di legname disponibile (e quindi il perimetro massimo)?

Sappiamo che $W = F/4$, per cui $dW/dF = 1/4$. Anche la larghezza aumenta di 25 cm a fronte di un aumento di un metro nel perimetro massimo possibile.

3. Come varia l'area del rettangolo quando varia la quantità di legname disponibile (e quindi il perimetro massimo)?

Sappiamo che Area $= LW = F^2/16$. Ne consegue che $d\text{Area}/dF = F/8$. L'area aumenta dunque di $F/8$ m^2 quando il perimetro massimo aumenta di un metro.

A.8 I moltiplicatori di Lagrange

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come è possibile risolvere i problemi di ottimizzazione vincolata risolvendo il vincolo per una delle variabili di scelta e sostituendo quindi il vincolo, così riscritto, all'interno della funzione obiettivo. Questo metodo (detto metodo di sostituzione) può essere applicato in tutti i casi in cui il vincolo (o l'insieme dei vincoli) ha una forma semplice, mentre diventa impossibile da impiegare in caso di problemi più complicati, in cui la forma del vincolo (o dei vincoli) è ben più complessa.

Vediamo ora di introdurre un nuovo metodo di soluzione, più generale, applicabile anche in queste situazioni. Con questo secondo metodo (detto metodo dei moltiplicatori di Lagrange) risolviamo i problemi di massimizzazione vincolata costruendo una nuova funzione, detta *funzione lagrangiana*, che è in realtà una combinazione della funzione obiettivo e del vincolo.

Partiamo da una descrizione generale di questo metodo, per poi illustrarlo in concreto attraverso un paio di esercizi svolti. Innanzitutto, costruiamo la funzione lagrangiana come segue:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda G(x, y)$$

Questa funzione è la soma di due termini: (1) la funzione obiettivo e (2) il vincolo moltiplicato per uno scalare ignoto λ, comunemente definito come moltiplicatore di *Lagrange*. Una volta costruita la funzione lagrangiana, occorre calcolare le sue derivate parziali rispetto alle tre incognite (x, y e λ) e poi imporre che tali derivate siano uguali a zero.

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} \tag{A.16}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial G(x, y)}{\partial y} \tag{A.17}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow G(x, y) = 0 \tag{A.18}$$

Le tre condizioni che abbiamo ricavato (A.16, A.17 e A.18) formano un sistema di tre equazioni in tre incognite. Risolvendolo, individuiamo anche la soluzione del problema di ottimizzazione vincolata.

Per vedere un'applicazione concreta del metodo appena presentato, consideriamo i prossimi due esercizi.

Esercizio svolto A.11
Il problema della pubblicità della birra (2)

Problema
Il problema è lo stesso dell'Esercizio svolto A.9. Nel risolvere il problema, questa volta applichiamo però il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Soluzione
Definiamo innanzitutto la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(T, R, \lambda) = B(T, R) + \lambda(10 - T - R)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange. Si noti che abbiamo riscritto il vincolo in modo che il lato destro dell'equazione sia pari a zero ($10 - T - R = 0$) e abbiamo quindi utilizzato il solo lato sinistro per costruire la funzione lagrangiana. Le condizioni per una soluzione interna (assumendo $T > 0$ e $R > 0$, visto che non ha senso parlare di una spesa pubblicitaria negativa) sono date da:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial T} = 0 \rightarrow \frac{\partial B(T,R)}{\partial T} - \lambda = 0 \qquad \text{(A.19)}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial R} = 0 \rightarrow \frac{\partial B(T,R)}{\partial R} - \lambda = 0 \qquad \text{(A.20)}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow 10 - T - R = 0 \qquad \text{(A.21)}$$

Le derivate parziali di questo problema sono $\partial B(T,R)/\partial T = 5000 - 500T$ e $\partial B(T,R)/\partial R = 1000 - 100T$. Possiamo quindi riscrivere l'Equazione (A.18) come:

$$5000 - 500T = \lambda \qquad \text{(A.22)}$$
$$1000 - 100R = \lambda \qquad \text{(A.23)}$$

Visto che il lato destro delle Equazioni (A.22) e (A.23) è lo stesso (ovvero λ), possiamo concludere che, nel punto di ottimo, $5000 - 500T = 1000 - 100R$. Questa è quella che definiamo come Equazione (A.24).

L'Equazione (A.25) è invece la stessa contenuta nell'Equazione (A.21). Se consideriamo le Equazioni (A.24) e (A.25), abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite, in questo caso T e R. Sappiamo che la scelta ottima su quanta pubblicità fare alla radio e quanta in televisione è determinata quindi sulla base di queste due equazioni:

$$5000 - 500T = 1000 - 100R \qquad \text{(A.24)}$$
$$\mathrm{T} + R = 10 \qquad \text{(A.25)}$$

Risolvendo il sistema, troviamo che $T = 8{,}33$ e $R = 1{,}67$; sono gli stessi risultati a cui eravamo giunti nell'Esercizio svolto A.9. È inoltre possibile calcolare il valore del moltiplicatore di Lagrange λ nel punto di ottimo, valore che ha una precisa interpretazione dal punto di vista economico. Osserviamo che $\lambda = 5000 - 500T = 5000 - 500(25/3) = 833{,}33$. (In alternativa, potremmo scrivere che $\lambda = 1000 - 100R = 1000 - 100(5/3) - 833{,}33$.) Il valore di λ indica (approssimativamente) di quanto potrebbero essere incrementate le vendite di birra (cioè il valore della funzione obiettivo) nel caso in cui fosse possibile incrementare il budget di spesa disponibile di un'unità (in questo esercizio, abbiamo assunto come unità di riferimento le centinaia di migliaia di euro). Avendo €100 000 in più per finanziare la propria campagna pubblicitaria, il manager si aspetterebbe quindi un incremento delle vendite pari a 833 barilotti.

Esercizio svolto A.12

Il problema delle recinzioni del pastore (2)

Problema

Il problema è lo stesso dell'Esercizio svolto A.10. Nel risolvere il problema, questa volta applichiamo però il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Soluzione

Definiamo innanzitutto la funzione lagrangiana:

$$\Lambda\,(L, W, \lambda) = LW + \lambda(F - 2L - 2W)$$

dove λ è il moltiplicatore di Lagrange. Si noti che, anche in questo caso, abbiamo riscritto il vincolo in modo che il lato destro dell'equazione sia pari a zero ($F - 2L - 2W = 0$) e abbiamo quindi utilizzato il solo lato sinistro per costruire la funzione lagrangiana. Le condizioni per una soluzione interna (assumendo $L > 0$ e $W > 0$, visto che le dimensioni di un rettangolo non possono essere negative) sono date da:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = 0 \rightarrow \frac{\partial (L,W)}{\partial L} - 2\lambda = 0 \tag{A.26}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial W} = 0 \rightarrow \frac{\partial (L,W)}{\partial W} - 2\lambda = 0 \tag{A.27}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow F - 2L - 2W = 0 \tag{A.28}$$

Le derivate parziali di questo problema sono $\partial(LW)/\partial L = W]$e $\partial(LW)/\partial W = L$.

Possiamo quindi riscrivere le condizione del primo ordine (A.26) e (A.27) come $W = 2\lambda$ e $L = 2\lambda$. Siccome il lato destro delle due equazioni è lo stesso (sempre 2λ), possiamo concludere che, nel punto ottimo, $W = L$. Questa è quella che chiameremo Equazione (A.29). L'Equazione (A.30) è invece la stessa equazione contenuta nell'Equazione (A.28). Le dimensioni ottimali del rettangolo (quelle che massimizzano l'area) sono quindi determinate dalle seguenti equazioni:

$$W = 2\lambda \tag{A.29}$$
$$L = 2\lambda \tag{A.30}$$

Abbiamo quindi trovato che $L = W = F/4$. Possiamo inoltre calcolare il valore assunto dal moltiplicatore di Lagrange λ nel punto di ottimo. Sappiamo che $\lambda = L/2$ e che $L = F/4$. Ne consegue che $\lambda = F/8$. Il valore di λ ci dice di quanto può essere incrementata l'area (misurata in metri quadrati) nel momento in cui aumentiamo di un'unità (ossia di un metro) il perimetro del rettangolo. Il pastore si aspetta quindi di poter incrementare l'area a disposizione di $F/8$ m^2 a fronte di un metro in più di perimetro.

Per comprendere il significato del moltiplicatore di Lagrange, supponiamo che il perimetro massimo disponibile venga aumentato da $F = 40$ metri a $F = 41$ metri. Il moltiplicatore di Lagrange ci rivela che l'area (il valore della funzione obiettivo) può essere aumentata di $F/8$ m^2 (quindi, più o meno, di 5 m^2). Vediamo quanto è accurata questa approssimazione.

Con un perimetro massimo di 40 metri, abbiamo calcolato che le dimensioni ottimali erano $L = W = 10$ e l'area era dunque pari a 100 m^2. Con un perimetro massimo di 41 metri, invece, i calcoli ci portano a stabilire che le dimensioni ottime sono $L = W = 10{,}25$ e l'area risultante è dunque pari a 105,06 m^2.

Si noti che l'approssimazione relativa all'incremento dell'area disponibile fornita dal valore del moltiplicatore di Lagrange è molto prossima al valore vero di tale variazione. Più piccolo è l'incremento considerato nel periodo, più buona è l'approssimazione stessa.

Nel testo abbiamo mostrato come i moltiplicatori di Lagrange possano essere utilizzati per risolvere alcuni problemi di natura economica relativi a ottimizzazioni vincolate. Nell'appendice al Capitolo 4, per esempio, abbiamo utilizzato questo metodo per risolvere il problema delle scelte del consumatore, in cui il consumatore deve massimizzare la sua utilità essendo soggetto al vincolo di bilancio relativo al suo reddito disponibile. Nell'Appendice al Capitolo 7 abbiamo invece applicato questo metodo per individuare la combinazione di minimo costo dei fattori produttivi di un'impresa, dato il livello di produzione prestabilito. (Quando ho visto il capitolo 7 l'appendice non c'era, è stata poi inserita?)

Sommario

• Nell'analisi economica è cruciale capire il modo in cui le variabili fondamentali sono relazionate fra loro. I modi principali in cui possiamo esprimere questo tipo di relazioni economiche passano attraverso la costruzione di tabelle, di grafici e di relazioni algebriche. (Esercizio svolto A.1)

• Il *valore marginale* di una variabile esprime la variazione osservata nel valore della variabile dipendente a fronte di una variazione unitaria della variabile indipendente. Tale valore misura inoltre l'inclinazione del grafico che rappresenta la relazione funzionale esistente fra la variabile dipendente (di norma indicata lungo l'asse verticale) e la variabile indipendente (solitamente riportata sull'asse orizzontale. Il *valore medio* della variabile dipendente è invece il valore assunto dalla variabile dipendente, diviso per quello della variabile indipendente.
Appare fondamentale capire bene la relazione esistente fra valori marginali e valori medi.

• Il valore medio deve *aumentare* quando il valore marginale risulta *maggiore* del valore medio.

• Il valore medio deve *ridursi* quando il valore marginale risulta *minore* del valore medio.

• Il valore medio è *costante* quando il valore marginale è *uguale* al valore medio.

• Le derivate sono utili per comprendere e quantificare molti dei valori marginali dell'economia. Tre dei valori marginali più ricorrenti nell'analisi microeconomica sono le utilità marginali, i costi marginali e i ricavi marginali. La derivata della funzione di utilità rappresenta l'*inclinazione* della curva dell'utilità complessiva e rappresenta quindi l'utilità marginale. La derivata del costo totale ci dà invece l'inclinazione della curva dei costi totali e rappresenta dunque il costo marginale di produzione. La derivata della funzione del ricavo corrisponde invece all'inclinazione della curva dei ricavi totali e rappresenta pertanto il ricavo marginale. (Esercizi svolti A.3, A.4 e A.5)

- Possiamo utilizzare le derivate per scoprire i punti in corrispondenza dei quali le relative funzioni hanno un massimo o un minimo. La funzione che si intende massimizzare o minimizzare prende il nome di *funzione obiettivo*. Quando vi è una sola variabile dipendente, nel punto di minimo o di massimo la derivata prima della funzione obiettivo rispetto alla variabile di scelta (la variabile endogena) deve risultare pari a zero. Allo stesso modo, nel punto di ottimo il grafico rappresentante la funzione deve avere inclinazione nulla. Controllando il segno della derivata seconda della funzione nel punto individuato, possiamo poi verificare se, in corrispondenza di tale punto, la funzione raggiunge un massimo o oppure un minimo. (Esercizio svolto A.6)
- Le derivate sono utili anche per calcolare il valore marginale nel caso di variabili dipendenti che siano funzione di più variabili indipendenti. Per calcolare il valore marginale, dobbiamo infatti considerare la derivata parziale della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente di interesse. Per massimizzare o minimizzare una funzione obiettivo a più variabili, occorre imporre tutte le derivate parziali della funzione uguali a zero e risolvere il sistema di equazioni derivante dalle condizioni del primo ordine. (Esercizi svolti A.7 e A.8)
- Un problema di ottimizzazione vincolata è un problema in cui si è chiamati a minimizzare o massimizzare una funzione obiettivo, soggetti a uno o più vincoli. Per risolvere questo tipo di problemi vi sono due approcci fondamentali. In alcuni casi, è possibile sostituire il vincolo direttamente nella funzione obiettivo, per poi calcolare le derivate e individuare i punti di ottimo. In altre situazioni, dove le relazioni funzionali sono più complesse, non è possibile adottare questo metodo (detto metodo di sostituzione) e bisogna quindi passare al metodo dei moltiplicatori di Lagrange per poter risolvere il problema. (Esercizi svolti A.9, A.10, A.11 e A.12)